Основы функционального анализа

Лектор — Виктор Алексеевич Александров

3-й семестр

1. Ряды Фурье

Понятие ряда Фурье 2π-периодической функции и задача о разложении периодической функции в ряд Фурье. Ряд Фурье функции с произвольным периодом. Разложения только по синусам или только по косинусам. Лемма Римана — Лебега. Ядро Дирихле. Теорема о представимости функции в точке своим рядом Фурье. Разложение функции $f(x) = \frac{\pi}{4}\operatorname{sign} x$, $x \in (-\pi, \pi)$ в ряд Фурье и применение получившегося ряда Фурье к суммированию числового ряда. Комплексная форма ряда Фурье. Теоремы о дифференцировании и интегрировании рядов Фурье. Задача о наилучшем приближении, теорема о наилучшем приближении и неравенство Бесселя для тригонометрических рядов. Равномерная сходимость рядов Фурье. Явление Гиббса. Теорема о гладкости функции и скорости сходимости её ряда Фурье (без доказательства). Равенство Ляпунова, обобщённое равенство Ляпунова и равенство Ляпунова в комплексной форме. Применение рядов Фурье к нахождению функции, гармонической в круге, по её значениям на границе. Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении тригонометрическими и алгебраическими многочленами.

Литература: основная — 4; дополнительная — 10, 13, 18.

2. Преобразование Фурье

Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье. Теорема о представимости функции в точке своим интегралом Фурье. Представление функции интегралом Фурье на полупрямой. Прямое и обратное синус- и косинус-преобразования Фурье. Вычисление синус- и косинус-преобразования Фурье функции $f(x) = e^{-ax}$, $x > 0$, $a > 0$. Представление функции $f(x) = e^{-ax}$ её интегралом Фурье и вычисление интегралов Лапласа. Комплексная форма интеграла Фурье. Преобразование Фурье и формула обращения. Вычисление прямого и обратного преобразования Фурье от функции e^{-ax^2}, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Быстро убывающие функции: определение, примеры и основные свойства.

Преобразование Фурье быстро убывающих функций: определение и основные свойства. Равенство Парсеваля. Свёртка быстро убывающих функций: определение и свойства. Формула Пуассона. Теорема Котельникова — Шеннона и её применение в теории цифровой передачи информации. Применение преобразования Фурье к решению уравнения теплопроводности. Понятие о дискретном преобразовании Фурье.

Литература: основная — 3; дополнительная — 7, 10, 13, 18.

3. Обобщённые функции

Пространства основных и обобщённых функций. Примеры обобщённых функций: регулярные обобщённые функции, δ-функции, $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x \pm i0}$. Формулы Сохоцкого. Сходимость обобщённых функций: наводящие соображения и определение. Дельта-образные последовательности. Теорема о пределе дельта-образных последовательностей. Плотность тела, вся масса которого сосредоточена в одной точке. Линейная замена переменной в обобщённой функции: наводящие соображения, определение, вычисление выражений $\delta(-x)$ и $\delta(x - x_0)$. Умножение обобщённых функций на бесконечно дифференцируемые: наводящие соображения, определение, вычисление выражений $a(x)\delta(x)$ и $x\mathcal{P}\frac{1}{x}$. Невозможность умножения произвольных обобщённых функций. Нелинейная замена переменной в одномерной дельта-функции: определение и теорема (без доказательства). Дифференцирование обобщённых функций: наводящие соображения, определение, примеры. Плотность заряда электрического диполя. Теорема о связи классической и обобщённой производных для кусочно-гладкой функции. Вычисление фундаментального решения трёхмерного оператора Лапласа. Свёртка обобщённых функций: наводящие соображения, определение, свойства, примеры вычисления. Теорема о фундаментальном решении линейного обыкновенного дифференциального оператора. Решение дифференциальных уравнений в пространстве обобщённых функций: как решают неоднородные уравнения, как решают однородные и как удовлетворяют граничным условиям. Простейший вариант теоремы вложения Соболева (без доказательства). Пространство обобщённых функций медленного роста. Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста: наводящие соображения, определение, свойства, примеры вычисления.

Литература: основная — 2; дополнительная — 8, 13, 16, 19.

4. Геометрия пространств со скалярным произведением

Линейные пространства: определение, линейная зависимость векторов, размерность пространства, подпространство. Примеры линейных пространств и подпространств. Нормированные линейные пространства: определение нормы, открытые и замкнутые множества, сходимость последовательности, замыкание множества, фундаментальная последовательность, полнота и сепарабельность пространства. Пример незамкнутого подпространства. Лебеговские функциональные пространства $L_p(G)$: определение и интегральные неравенства Гёльдера и Минковского (без доказательства). Полнота и сепарабельность лебеговских пространств, плотность множества гладких функций в них (без доказательства). Линейные пространства со скалярным произведением (евклидовы и унитарные): определение и примеры. Неравенство Коши — Буняковского в пространстве со скалярным произведением. Норма, порождённая скалярным произведением. Непрерывность скалярного произведения по первому аргументу. Равенство параллелограмма. Гильбертово пространство. Угол между векторами. Ортогональность векторов. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Ортогональное проектирование. Задача о наилучшем приближении — проектирование на конечномерные подпространства. Коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы. Неравенство Бесселя. Гильбертов базис. Теорема о существовании гильбертова базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Ряд Фурье элемента гильбертова пространства. Теорема о представлении элемента его рядом Фурье. Равенство Парсеваля. Замкнутость ортонормированной системы.

Литература: основная — 1; дополнительная — 5, 6, 9, 10, 12, 13, 15, 17.

Литература

1. *Александров В. А.* Геометрия пространств со скалярным произведением: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1995.
2. *Александров В. А.* Обобщённые функции: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2005.
3. *Александров В. А.* Преобразование Фурье: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2002.
4. *Александров В. А.* Ряды Фурье: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1996.

5. *Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Выш. шк., 1978.
6. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
7. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
8. *Зорич В. А.* Математический анализ. М.: Наука, 1984. Т. 2.
9. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
11. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. М.: Мир, 1978. Т. 1.
12. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982.
13. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М.; Л.: ГИТТЛ, 1941. Т. 4.
14. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Т. 3.
15. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965.

План семинаров

1-й семинар. — Разложение 2π-периодических функций в ряд Фурье. Разложение только по синусам или только по косинусам.

2-й семинар. — Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом. Комплексная форма ряда Фурье. Разложение в ряд Фурье функций вида

$$\frac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}, \quad |a|<1,$$

без вычисления интегралов.

3-й семинар. — Равенство Ляпунова. Суммирование числовых рядов с помощью рядов Фурье.

4-й семинар. — Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов Фурье.

5-й семинар. — Представление функции её интегралом Фурье. Разложение на полупрямой.

6-й семинар. — Общие свойства преобразования Фурье: сдвиг по фазе, сдвиг по аргументу, производная от преобразования Фурье и преобразование Фурье от производной. Нахождение преобразования Фурье конкретных функций.

7-й семинар. — Нахождение преобразования Фурье конкретных функций.

8-й семинар. — Свёртка. Формула Пуассона.

9-й семинар. — Применение преобразования Фурье к решению уравнения Лапласа в полуплоскости.

10-й семинар. — Основные и обобщённые функции. Сходимость обобщённых функций. Дифференцирование обобщённых функций.

11-й семинар. — Применение теоремы о фундаментальном решении обыкновенного дифференциального оператора и нахождение фундаментального решения двумерного оператора Лапласа и/или оператора $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$.

12-й семинар. — Умножение обобщённых функций на бесконечно дифференцируемые. Линейная и нелинейная замены переменных в обобщённых функциях. Свёртка обобщённых функций.

13-й семинар. — Обобщённые функции медленного роста и преобразование Фурье от них.

14-й семинар. — Простейшие свойства сходимости в гильбертовом пространстве: всякая сходящаяся последовательность фундаментальна, ограничена и имеет не более одного предела; всякое конечномерное подпространство замкнуто. Парадоксальные свойства бесконечномерных гильбертовых пространств: существование незамкнутых подпространств и возможность поместить бесконечно много попарно непересекающихся шаров фиксированного радиуса в единичный шар.

15-й семинар. — Поляризационые тождества. Вычисление углов в гильбертовом пространстве. Кривая Винера. Равенство параллелограмма.

16-й семинар. — Процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Полные ортонормированные системы, состоящие из многочленов, ступенчатых функций и тригонометрических функций. Задача наилучшего приближения.

17-й семинар. — Повторный разбор наиболее трудных вопросов.

Задания по основам функционального анализа

Задание 1 *(сдать до 10 октября)*

Ряды Фурье

1. Нарисуйте график и найдите ряд Фурье функции заданной на промежутке $[-\pi, \pi]$ равенством $f(x) = |x|$, и предполагая, что она имеет период 2π.

2. Разложите функцию $f(x) = x^2$ в ряд Фурье по синусам на промежутке $(0, \pi)$.

3. Используя предыдущую задачу, найдите сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

4. Докажите, что функция f, определённая на отрезке $[-\pi, \pi]$, является нечётной (т. е. для всех $x \in [-\pi, \pi]$ удовлетворяет соотношению $f(-x) = -f(x)$), если и только если коэффициенты c_n её комплексного ряда Фурье связаны соотношениями $c_n = -c_{-n}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

5. Представьте функцию $\ln(1 - 2a\cos x + a^2)$ в виде комплексного, а затем — в виде вещественного ряда Фурье, считая, что $|a| < 1$.

6. Пусть функция f непрерывна в промежутке $[-\pi, \pi]$ и имеет в нём (за исключением разве лишь конечного числа точек) производную f', интегрируемую с квадратом. Докажите, что если при этом выполнены условия

$$f(-\pi) = f(\pi) \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0,$$

то имеет место неравенство

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2\,dx,$$

называемое неравенством Виртингера, причём равенство в нём имеет место лишь для функций вида $f(x) = A\cos x + B\sin x$.

7. Рассмотрим однородный тонкий стержень с концами $x = 0$ и $x = \pi$. Измеренную в момент времени t температуру точки этого стержня с координатой x обозначим через $u(t, x)$. Как известно, с течением времени перераспределение температуры в стержне происходит таким образом, что функция u удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где a — некоторая постоянная, называемому уравнением теплопроводности. Предполагая, что на обоих концах стержня поддерживается постоянная температура, скажем, равная нулю, и предполагая известным начальное распределение тепла т. е. предполагая, что $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ и $u(0, x) = f(x)$, найдите решение уравнения теплопроводности.

Преобразование Фурье

8. Считая параметр a положительным докажите формулу

$$2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2} \cos 2yx \, dy = \begin{cases} \pi(1 - |x|), & \text{если } |x| \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

9. Найдите функцию f, если

$$\int\limits_0^{+\infty} f(y) \sin xy \, dy = xe^{-x^2}, \qquad x > 0.$$

10. Найдите прямое и обратное преобразования Фурье функции $f(x) = xe^{-a|x|}$, $a > 0$.

Задание 2 *(сдать до 15 ноября)*

11. Найдите обратное преобразование Фурье функции

$$\frac{y}{(y^2 + a^2)^2}.$$

12. Рассмотрим быстро убывающую функцию $\varphi(x)$ вещественной переменной x и её преобразование Фурье $\psi(p)$, которое, как вы знаете,

тоже быстро убывает с ростом модуля p, причём функции $\varphi(x)$ и $\psi(p)$ имеют общую L_2-норму. Пусть она равна единице:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(p)|^2\, dp = 1.$$

В таком случае мы вправе считать функции $|\varphi(x)|^2$ и $|\psi(p)|^2$ плотностями распределения вероятностей случайных величин x и p, которые, в свою очередь, можно интерпретировать, например, как координату и импульс «одномерной» квантовой частицы.

Интегралы

$$x_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, |\varphi(x)|^2\, dx \quad \text{и} \quad p_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p\, |\psi(p)|^2\, dp$$

имеют смысл средних значений случайных величин x и p при заданных их распределениях, а степень «разброса» этих величин около их средних значений характеризуют их среднеквадратические отклонения — положительные числа $\sigma(\varphi)$ и $\sigma(\psi)$, определяемые равенствами

$$\sigma^2(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2\, |\varphi(x)|^2\, dx \quad \text{и} \quad \sigma^2(\psi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (p - p_0)^2\, |\psi(p)|^2\, dp.$$

Ваша задача — доказать одно из самых красивых и удивительных неравенств, какие можно встретить в математике и которое было открыто физиком:

$$\sigma(\varphi)\, \sigma(\psi) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Это неравенство представляет собой строгое математическое выражение знаменитого принципа неопределённости Гейзенберга, согласно которому нельзя одновременно измерить, например, координату и импульс квантовой частицы — уточняя одно, мы непременно теряем информацию о другом.

Доказательство проведите по следующей схеме. Наряду с функциями $\varphi(x)$ и $\psi(p)$ рассмотрим еще одну пару функций

$$\Phi(x) = e^{-ip_0\,(x + x_0/2)}\, \varphi(x + x_0) \quad \text{и} \quad \Psi(p) = e^{ix_0\,(p + p_0/2)}\, \psi(p + p_0).$$

Как легко видеть, $\Psi\,(p)$ служит преобразованием Фурье функции $\Phi\,(x)$.

(а) Докажите, что новые функции имеют те же L_2-нормы, что и прежние:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi\,(x)|^2\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Psi\,(p)|^2\,dp = 1,$$

но относительно них средние значения x и p уже равны нулю:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,|\Phi\,(x)|^2\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p\,|\Psi(p)|^2\,dp = 0.$$

Убедитесь также, что произведённая нами «нормировка» распределений случайных величин x и p не меняет их дисперсий:

$$\sigma^2(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2|\Phi\,(x)|^2\,dx \quad \text{и} \quad \sigma^2\,(\psi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p^2|\Psi(p)|^2\,dp.$$

(б) Опираясь на равенство Парсеваля, а также на связь, которую преобразование Фурье устанавливает между дифференцированием и умножением на аргумент, для каждого вещественного t докажите равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |tx\Phi\,(x) + \Phi'(x)|^2\,dx = t^2\sigma^2(\varphi) - t + \sigma^2\,(\psi).$$

(в) Вам остаётся заметить, что появившийся здесь вещественный квадратный многочлен — по своему происхождению — неотрицателен, и исследовать его дискриминант.

13. Вычислите свёртку $e^{-|x|} * e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

Обобщённые функции

14. Докажите, что для любого $m \geqslant 0$ в пространстве обобщённых функций $x^m e^{iax} \to 0$ при $a \to \pm\infty$.

15. Трактуя несобственный интеграл как предел, вычисленный в пространстве обобщённых функций, соответствующих собственных

интегралов, докажите равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\,dy = \delta(x).$$

16. Докажите равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x-k).$$

17. Докажите равенство

$$|\cos x|'' + |\cos x| = 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\bigl(x - \frac{\pi}{2} - \pi k\bigr).$$

18. Пусть a и v — постоянные и $E(x,t)$ — регулярная обобщённая функция, заданная на плоскости формулой

$$E(x,t) = \begin{cases} a, & \text{если } x^2 \leqslant v^2t^2 \text{ и } t \geqslant 0; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вычислите выражение

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$

в смысле теории обобщённых функций. В зависимости от данного v подберите постоянную a так, чтобы E было фундаментальным решением оператора

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

19. Вычислите свёртку $\delta''(x) * |x|$.

20. Найдите фундаментальное решение оператора

$$\frac{d}{dx} + 2x,$$

т. е. решите обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'(x) + 2xy\,(x) = \delta\,(x).$$

Задание 3 *(сдать до 30 декабря)*

21. Найдите преобразование Фурье регулярной обобщённой функции медленного роста, заданной формулой $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Геометрия пространств со скалярным произведением

22. Докажите, что сложение векторов в гильбертовом пространстве непрерывно.

23. Докажите, что любом в унитарном пространстве справедливо так называемое поляризационное тождество

$$(x, y) = \frac{1}{4}\Big[(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) - i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)\Big].$$

24. Докажите, что в пространстве $L_p[a,b]$ можно ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства, если и только если $p = 2$.

25. Найдите углы треугольника, чьи вершины расположены в точках $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = t$, и $x_3(t) = (3t^2 - 1)/2$ евклидова пространства $L_2[0,1]$.

26. Предполагая, что $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < 1$, ортонормируйте n кусочно гладких функций

$$x_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant t_k; \\ 0, & \text{если } t_k < t \leqslant 1, \end{cases}$$

$(k = 1, 2, \ldots, n)$ в евклидовом пространстве $L_2[0,1]$.

27. Проверьте, что функции $\{\sqrt{2/\pi}\sin nt\}$, $n = 1, 2, \ldots$, образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2[0,\pi]$.

28. Убедитесь, что в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ функции, указанные в задаче 27, образуют ортогональную систему, не являющуюся базисом.

29. Для функции $x(t) = e^t$ найдите многочлены $y_n(t)$ степени $n = 0, 1, 2$ такие, что норма $\|x(t) - y_n(t)\|$, вычисленная в пространстве $L_2[-1,1]$, минимальна.

Программу и задания
по основам функционального анализа
составил д.ф.-м.н. В. А. Александров

Основы функционального анализа

Лектор — Виктор Алексеевич Александров

4-й семестр

4. Геометрия пространств со скалярным произведением *(продолжение)*

Теорема Рисса—Фишера и теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств. Критерий полноты ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тригонометрическая система функций как пример полной ортогональной системы.

5. Ортогональные многочлены

Ортогональные многочлены как результат ортогонализации последовательности мономов. Общие свойства ортогональных многочленов. Свойства нулей ортогональных многочленов. Классические ортогональные многочлены и их свойства (без доказательства). Многочлены Лежандра: производящая функция, рекуррентные соотношения, дифференциальное уравнение, соотношения ортогональности, формула Родрига. Разложение функций в ряды по многочленам Лежандра. Мультипольное разложение кулонова потенциала. Применение многочленов Лежандра при решении дифференциальных уравнений в частных производных. Поле точечного заряда, помещённого внутри полой проводящей сферы.

Многочлены Эрмита и Лагерра (*изучаются только на семинарах*): производящая функция, рекуррентные соотношения, дифференциальное уравнение, соотношения ортогональности, формула Родрига. Разложение функций в ряды по многочленам Эрмита и Лагерра. Функции Эрмита и Лагерра.

Литература: основная — 3.

6. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

Линейные операторы, их общие свойства. Непрерывные и ограниченные операторы. Норма оператора. Сходимость операторов. Обратный оператор. Теорема Неймана. Спектр оператора. Резольвента.

Простейшие свойства спектра. Линейные функционалы. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса. Бра-векторы и кет-векторы. Оператор, сопряжённый ограниченному, его простейшие свойства. Применение сопряжённого оператора при нахождении спектра. Ограниченные самосопряжённые операторы: теоремы о спектре, норме и инвариантном подпространстве. Компактные операторы: определения и простейшие свойства. Теорема о дискретности точечного спектра компактного оператора. Компактные самосопряжённые операторы: теорема о точечном спектре и теорема Гильберта — Шмидта. Спектральное разложение компактного самосопряжённого оператора. Вариационный принцип Куранта отыскания собственных значений самосопряжённого компактного оператора (без доказательства). Приближённый способ отыскания собственных значений возмущённого оператора (наводящие соображения).

Литература: основная — 1, 2; дополнительная — 5–11.

7. Интегральные уравнения

Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра и примеры задач, к ним приводящих. Интегральный оператор Гильберта — Шмидта. Решение уравнений с вырожденным ядром. Альтернатива Фредгольма. Уравнения с малым параметром. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений. Интегральные уравнения с симметричными ядрами. Теорема Гильберта — Шмидта для интегральных операторов. Разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра. Разложение повторного ядра интегрального оператора по его собственным функциям. Теорема Мерсера.

Литература: основная — 4; дополнительная — 5, 8.

Литература

1. *Абашеева Н. Л.* Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах в примерах и хадачах: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 2007.
2. *Александров В. А.* Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1996.
3. *Александров В. А.* Ортогональные многочлены: Метод. указания. Новосибирск: НГУ, 1993.
4. *Александров В. А., Колесников Е. В.* Интегральные уравнения: Метод. указания. Новосибирск: НГУ, 1993.

5. *Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Выш. шк., 1978.
6. *Боум А.* Квантовая механика: основы и приложения. М.: Мир, 1990.
7. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
9. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. М.: Мир, 1978. Т. 1.
10. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982.
11. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М.; Л.: ГИТТЛ, 1959. Т. 5.

План семинаров

1-й семинар. — Нахождение ортогонального дополнения к подпространству. Изоморфизм гильбертовых пространств. Вычисление суммы внутренних углов произвольного треугольника.

2-й семинар. — Общие свойства ортогональных многочленов.

3-й семинар. — Многочлены Эрмита: производящая функция; вывод и использование рекуррентных формул и соотношений ортогональности.

4-й семинар. — Многочлены Эрмита: вывод и использование дифференциального уравнения; разложение функций в ряды по многочленам Эрмита.

5-й семинар. — Многочлены Лагерра: производящая функция; вывод и использование рекуррентных формул, соотношений ортогональности и дифференциального уравнения; разложение функций в ряды по многочленам Лагерра.

6-й семинар. — Многочлены Лежандра: применение производящей функции, рекуррентных формул и соотношений ортогональности; разложение функций в ряды по многочленам Лежандра.

7-й семинар. — Линейные функционалы.

8-й семинар. — Вычисление нормы ограниченного оператора и оператора, обратного к данному.

9-й и *10-й семинары.* — Спектр и резольвента ограниченного оператора.

11-й семинар. — Бра-векторы и кет-векторы.

12-й семинар. — Компактные операторы.

13-й семинар. — Сведе́ние дифференциальных уравнений к интегральным и наоборот. Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром.

14-й семинар. — Альтернатива Фредгольма. Повторные ядра и резольвента интегрального уравнения.

15-й семинар. — Собственные значения и собственные функции интегральных уравнений с симметричным ядром. Решение неоднородных уравнений Фредгольма с симметричным ядром.

16-й семинар. — Повторный разбор наиболее трудных вопросов.

Задания по основам функционального анализа

Задание 4 *(сдать до 15 марта)*

Геометрия пространств со скалярным произведением *(продолжение)*

1. В пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ найдите ортогональное дополнение к подпространству, состоящему из многочленов с нулевой суммой коэффициентов.

Ортогональные многочлены

2. Как известно, многочлены Чебышёва первого рода $T_n(x)$ ортогональны на промежутке $(-1, 1)$ с весом $1/\sqrt{1-x^2}$. Для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ докажите, что

(а) функция $\cos(n \arccos x)$ является многочленом степени n и

(б) многочлен $T_n(x)$ пропорционален $\cos(n \arccos x)$, т. е. докажите равенство $T_n(x) = C_n \cos(n \arccos x)$, где C_n — некоторая постоянная.

3. Докажите тождество

$$e^{-x^2} H_n(x) = -\frac{d}{dx} e^{-x^2} H_{n-1}(x),$$

где H_n — многочлен Эрмита, стандартизованный с помощью производящей функции, т. е. такой, что

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n.$$

4. Вычислите интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x H_n(x) H_{n+1}(x)\, dx.$$

5. Разложите функцию $|x|$ в ряд по многочленам Эрмита.

6. Как вы знаете, многочлены Лагерра $L_n^{\alpha}(x)$ можно определить как коэффициенты тейлоровского разложения по переменной t их производящей функции

$$w\,(x, t, \alpha) = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{\alpha+1}}, \quad \text{так что} \quad w\,(x, t, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x)\, t^n.$$

Проверьте соотношение

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x, t, \alpha) = -t w(x, t, \alpha + 1)$$

и используя егоо выведите для любого натурального n формулу

$$\frac{\partial L_n^{\alpha}}{\partial x}(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x).$$

7. Вычислите интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha+1} L_n^{\alpha}(x) L_{n+1}^{\alpha}(x)\, dx.$$

8. Как вам известно, функция

$$w\,(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}$$

служит производящей функцией для многочленов Лежандра $P_n(x)$ в том смысле, что

$$w\,(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n.$$

Покажите, что

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

9. Вы знаете, что последовательность производных любых классических ортогональных многочленов в свою очередь является последовательностью классических ортогональных многочленов, причём с тем же промежутком ортогональности (но, конечно, с другим весом).

(а) Убедитесь, что последовательность производных $P_1'(x), P_2'(x), \ldots, P_n'(x), \ldots$ многочленов Лежандра ортогональна на промежутке $(-1,1)$ с весом $h(x) = 1 - x^2$.

(б) Найдите квадрат нормы многочлена $P_n'(x)$ в пространстве $L_2^h(-1,1)$, т. е. вычислите интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)(P_n'(x))^2\,dx.$$

Другими словами, в этой задаче вам предложено (а) убедиться, что производные многочленов Лежандра пропорциональны ультрасферическим многочленам $C_n(x;\lambda)$ при $\lambda = 3/2$ и (б) найти соответствующие коэффициенты пропорциональности.

Задание 5 *(сдать до 25 апреля)*

Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

В задачах 10–16 $A : l_2 \to l_2$ обозначает «диагональный» линейный оператор, действующий по правилу:

$$A : (x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots) \mapsto (a_1x_1,\ a_2x_2,\ a_3x_3, \ldots),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — фиксированная ограниченная последовательность комплексных чисел.

10. Докажите, что оператор A непрерывен и найдите его норму.

11. Выясните является ли оператор A обратимым и если является, то найдите A^{-1}.

12. Опишите сопряжённый к A оператор и выясните, когда оператор A самосопряжён. Выясните, когда оператор A унитарен.

13. Найдите точечный спектр оператора A.

14. Найдите непрерывный спектр оператора A.

15. Найдите остаточный спектр оператора A. Укажите резольвентное множество оператора A.

16. Докажите, что оператор A компактен если и только если $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

17. Если S является замкнутым подпространством гильбертова пространства H, то, как вы знаете, всякий вектор x из H единственным образом представляется в виде суммы $y + z$, где y лежит в S, а z ортогонален S. При этом оператор P, сопоставляющий вектору x вектор y, называется оператором проектирования на S, что записывают формулой $Px = y$. Найдите спектр (точечный, непрерывный, остаточный) и резольвентное множество оператора проектирования.

18. Покажите, что используя «бра» и «кет» обозначения оператор проектирования P на подпространство, натянутое на вектор x, можно задать формулой $P = |x\rangle\langle x|$.

19. Пусть операторы A и B заданы формулами

$$Ax(t) = \frac{\cos t}{\pi} \int_0^{2\pi} x\,(s) \cos s \, ds \qquad \text{и} \qquad Bx(t) = t \int_0^t x(s)\, ds.$$

Докажите, что они преобразуют гильбертово пространство $L_2\,[0, 2\pi]$ в себя. Считая пространство $L_2\,[0, 2\pi]$ областью определения этих операторов, найдите асмптотические выражения для собственных значений оператора $A + \varepsilon B$ при $\varepsilon \to 0$.

20. Рассмотрим в унитарном гильбертовом пространстве H ограниченный линейный оператор A. Если A самосопряжён, т. е. $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всех x и y из H, то отвечающая ему форма (Ax, x), очевидно, вещественна. Вы легко убедитесь в этом. Любопытно, что верно и обратное утверждение: если форма (Ax, x) вещественна, то оператор A самосопряжён. Именно это вам и предлагается доказать.

Подсказка: обратите внимание на числа вида $(A\,(x + cy), x + cy)$, не забыв о том, что они вещественны, так что мы можем записать их в виде $(x + cy, A\,(x + cy))$. В частности, это верно для $c = 1$ и $c = i$. Отсюда — один шаг до «решающей» системы равенств:

$$(Ax, y) + (Ay, x) = (x, Ay) + (y, Ax),$$
$$(Ax, y) - (Ay, x) = (x, Ay) - (y, Ax).$$

Задание 6 *(сдать до 30 мая)*

21. Докажите, что для любых самосопряжённых ограниченных операторов $A : H \to H$ и $B : H \to H$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}\big|([A,B]x,x)\big| \leqslant \|Ax\| \cdot \|Bx\|,$$

где $[A,B] = AB - BA$ — коммутатор операторов A и B.

Отметим на будущее, что в квантовой механике вводят обозначение $\langle A\rangle_x = (Ax,x)$, переписывают предыдущее неравенство в виде

$$\langle A^2\rangle_x \langle B^2\rangle_x \geqslant \frac{1}{4}\langle [A,B]\rangle_x^2$$

и интерпретируют его как принцип неопределённости Гейзенберга. Докажите последнее неравенство. (Для полноты отметим, что наиболее интересные с точки зрения квантовой механики опeратры не являются ограниченными, так что пока вы доказали лишь частный случай принципа неопределённости Гейзенберга.)

Интегральные уравнения

22. Составьте интегральное уравнение, отвечающее задаче Коши

$$x'''(t) + tx(t) = e^t,$$
$$x(0) = 1, x'(0) = x''(0) = 0.$$

23. Решите интегральное уравнение, сведя его к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$x(t) = 4e^t + 3t - 4 - \int_0^t (t-s)x(s)\,ds.$$

24. Найдите все решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром

$$x(t) - \mu \int_{-1}^{1} (t^2s^2 + 4ts + 1)x(s)\,ds = 2\pi^2 \cos 2\pi t.$$

Рассмотрите все возможные значения параметра μ.

25. Исследуйте разрешимость предыдущего уравнения при различных значениях параметра μ с помощью альтернативы Фредгольма.

26. Найдите повторные ядра и резольвентное ядро, а также представьте через резольвентное ядро решение интегрального уравнения

$$x(t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 te^s x(s)\,ds = e^{-t}.$$

27. Найдите собственные значения и собственные функции интегрального уравнения

$$x(t) - \mu\int\limits_0^\pi K(t,s)x(s)\,ds = 0$$

с симметричным ядром, сводя его к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения, если

$$K(t,s) = \begin{cases} \sin s\cos t, & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant s; \\ \cos s\sin t, & \text{если} \quad s \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

28. Пусть $f \in L_2[0,\pi]$, а число μ не является собственным значением оператора A из предыдущей задачи. Найдите разложение решения интегрального уравнения $x - \mu Ax = f$ по собственным функциям оператора A.

29. Докажите, что при выполнении условий теоремы Мерсера, т. е. если ядро K непрерывно, симметрично и все его собственные значения μ_n, за исключением, может быть, конечного их числа, имеют одинаковый знак, то справедливо равенство

$$\sum_n \frac{1}{\mu_n^2} = \int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(t,s)|^2\,dt\,ds.$$

Программу и задания
по основам функционального анализа
составил д.ф.-м.н. В. А. Александров

Дифференциальные уравнения

Лектор — Михаил Вячеславович Коробков

3-й семестр

1. Уравнения первого порядка

Уравнение $y' = f(x, y)$. Определение решения. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения и его решений. Поле направлений, порождаемое дифференциальным уравнением. Непродолжаемое решение. Задача Коши. Теорема Пеано существования решения. Теорема Пикара существования и единственности решения. Уравнение с разделяющимися переменными. Однородные и квазиоднородные уравнения. Линейное уравнение. Уравнение Бернулли. Общее поле направлений на плоскости, интегральные линии, связь с решениями дифференциального уравнения. Уравнение в полных дифференциалах. Интеграл поля направлений. Интегрирующий множитель и уравнение в частных производных для него. Автомодельный множитель и критерий его существования. Автомодельный множитель для однородного поля направлений. Интегрирующий множитель уравнения Дарбу.

2. Системы дифференциальных уравнений

Нормальные системы. Запись системы в векторной форме. Теорема Пикара для нормальных систем. Теорема о покидании компакта. Поведение непродолжаемых решений в «вертикальной полосе». Уравнение $y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, сведение к системе, постановка задачи Коши. Теорема существования и единственности. Системы, разрешенные относительно старших производных, сведение к нормальным системам.

Методы понижения порядка дифференциальных уравнений.

3. Общая теория линейных систем

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы $\dot{X} = A(t)X + F(t)$. Линейность пространства $\mathcal{L}$ всех непродолжаемых решений однородной системы $\dot{X} = A(t)X$, его изоморфность пространству $\mathbb{R}^n$. Фундаментальные системы решений (ФСР).

Фундаментальные матрицы и их свойства. Определитель Вронского, его связь с линейной зависимостью решений. Формула Лиувилля — Остроградского. Принцип суперпозиции, связь решений неоднородной и однородной системы. Построение частного решения методом Лагранжа вариации произвольных постоянных.

Линейное уравнение n-го порядка, сведение к линейной системе. Изоморфизм между пространствами непродолжаемых решений однородного уравнения и соответствующей системы. Теория линейного уравнения n-го порядка как следствие теории линейных систем.

Комплексные линейные системы, сведение к действительным системам.

4. Линейные системы с постоянными коэффициентами

Линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами, построение ФСР. Частное решение в случае квазиполиномиальной неоднородности.

Построение ФСР для системы $\dot{X} = AX$ с постоянными коэффициентами при помощи базиса Жордана матрицы A. Частное решение в случае квазиполиномиальной неоднородности. Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения линейных однородных и неоднородных систем уравнений.

Малые колебания систем со многими степенями свободы; векторы нормальных колебаний. Вынужденные колебания с неоднородностью в форме квазиполинома. Периодические решения линейных уравнений, представление их рядами Фурье; резонанс.

5. Зависимость решений от начальных данных и параметров

Непрерывная зависимость решений системы от начальных данных и параметров. Дифференцируемость решений по начальным данным и параметрам. Класс гладкости решения, соответствующий гладкости правой части системы. Уравнения в вариациях и постановка Задачи Коши для производных решения по начальным данным и по параметрам. Получение соответствующих теорем для уравнения произвольного порядка как следствие из теории систем. Применение теории гладкой зависимости решений — метод малого параметра в теории нелинейных колебаний. Теорема Пуанкаре о существовании и единственности периодического решения, стремящегося к периодическому решению порождающего (невозмущенного) уравнения. Применение теоремы Пуанкаре к случаю линейного нерезонансного порождающего уравнения. Разложение периодического решения в асимптотический ряд по малому параметру.

Существование аналитического решения задачи Коши для нелинейных аналитических систем и уравнений n-го порядка. Построение решений с помощью степенных и обобщенно-степенных рядов. Уравнение Бесселя; функции Бесселя первого и второго рода.

Литература

1. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.
3. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.
4. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.
6. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям.
7. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
8. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. / Под ред. В. К. Романко – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.

План семинаров

Уравнения первого порядка

1. Поле направлений, изоклины, задача Коши. Уравнения с разделяющимися переменными	2 семинара
2. Однородное уравнение	1 семинар
3. Линейное уравнение, уравнение Бернулли	1 семинар
4. Уравнение в полных дифференциалах, интегрирующий множитель, уравнение Дарбу	1 семинар

Уравнения высшего порядка

1. Постановка задачи Коши. Существование и единственность решения. Уравнения, допускающие понижение порядка	2 семинара

Линейные системы

1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами, однородные и неоднородные. Уравнение Эйлера.	2 семинара
2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами, формула Остроградского-Лиувилля	1 семинар
3. Линейные системы с постоянными коэффициентами	2 семинара
4. Малые колебания систем	1 семинар
5. Периодические решения линейного уравнения; ряды Фурье	1 семинар

Зависимость решений от начальных данных и параметров

1. Дифференцируемость по начальным данным и параметрам; уравнения в вариациях	1 семинар
2. Метод малого параметра для периодических решений в теории нелинейных колебаний	1 семинар

Задания по дифференциальным уравнениям

3-й семестр

Задание 1 (сдать до 15 октября)

1. С помощью изоклин построить картину решений уравнения $y' = x - y^2$. Исследовать выпуклость решений, найти линию перегиба. Указать области определения решений и наличие асимптот в зависимости от начальных условий.

2. Записать решение уравнения

$$y' = \sqrt[3]{\frac{y^2+1}{x^4+1}}$$

в виде интегралов с определенными пределами. Доказать следующие утверждения:

а) каждое непродолжаемое решение $y(x)$ определено для всех $x \in \mathbb{R}$;

б) каждая интегральная кривая имеет две горизонтальные асимптоты.

Указать, какой тип симметрии имеет картина решений.

3. Найти общее решение уравнения

$$(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$$

4. Пусть функция f непрерывна и ограничена на всей оси: $|f(x)| \leq m$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Для уравнения

$$y' = 4y\sin^2 x + f\,(x)$$

доказать утверждения:

а) существует решение $y^*(x)$, $-\infty < x < +\infty$, ограниченное на $\mathbb{R}$, и такое решение только одно; дать его формулу; верхнюю границу его модуля оценить через m;

б) если функция $f(x)$ имеет период, кратный π, то и $y^*(x)$ — периодическая функция с тем же периодом.

5. Рассмотрим уравнение:

$$y' = \frac{4y}{x} + 2x\sqrt{|y|}.$$

а) Дать картину решений; показать, что она симметрична относительно оси Oy.

б) Написать непродолжаемое решение и указать интервал его существования для задачи Коши $y(1) = 1$.

в) Выяснить, сколько непродолжаемых решений имеет задача Коши $y(1) = -1$.

6. Для поля направлений Дарбу

$$(2x^2y^2 + y)dx + (x^3y - x)dy = 0$$

а) написать уравнения интегральных линий;

б) дать картину всех решений.

7. Рассмотрим уравнение

$$y''' + y\,y'' = 0.$$

Пусть $y(x)$, (α, ω) — некоторое его непродолжаемое решение, причем для некоторого $x_0 \in (\alpha, \omega)$ справедливо равенство $y''(x_0) = 0$. Доказать, что $(\alpha, \omega) = (-\infty, +\infty)$ и $y''(x) \equiv 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

8. Решить задачу Коши

$$4yy'' + (4y^2 - 1)(y')^6 + (y')^2 = 0, \quad y(2) = 1, \;\; y'(2) = 1.$$

9. Решить задачу Коши

$$(1 - \sin x)yy'' + yy' \cos x = (y')^2, \quad y(0) = 2, \;\; y'(0) = 1.$$

10. Решить задачу Коши

$$x^4 y'' - x^2 y(y')^2 + 2xy'y^2 = y^3, \quad y(2) = 2, \;\; y'(2) = 1.$$

Задание 2 (сдать до 25 ноября)

1. Уравнение Лежандра

$$(1 - t^2)\ddot{x} - 2t\dot{x} + 6x = 0$$

имеет решение в виде полинома. Найти его методом неопределенных коэффициентов и, пользуясь им, построить второе линейно независимое решение.

2. Методом вариации произвольных постоянных найти решение уравнения

$$\ddot{x} - x = (4t^2 + 1)/t\sqrt{t}.$$

3. Пусть A — постоянная $n \times n$ матрица с действительными элементами и n — нечетно. Предположим, что каждое решение системы $\dot{X} = AX$ ограничено на всей оси. Доказать: $\det A = 0$.

4. Построить фундаментальную систему решений уравнения $\dot{X} = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение уравнения

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = e^t \sin t + e^{-t} \sin t.$$

6. Найти векторы нормальных колебаний и написать общее решение системы

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0, \\ M\ddot{x}_2 + k(2x_2 - x_1 - x_3) = 0, \\ m\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) = 0, \end{cases}$$

описывающей продольные колебания молекулы CO_2.

Задание 3 (сдать до 25 декабря)

1. Найти периодическое решение уравнения $\ddot{x} - x = f(t)$, где

$$f(t) = \begin{cases} t, \text{ если } 0 \le t \le 1, \\ 2 - t, \text{ если } 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

и $f(t+2) \equiv f(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

2. Существует ли периодическое решение уравнения $\ddot{x} + 9x = \sin^3 t$? Построить общее решение.

3. Пусть $X(t, \mu)$ — решение задачи Коши $X(0, \mu) = 1 + \mu$ для уравнения

$$\dot{x} = x^2 + \mu^2 t.$$

Указать на каком максимальном интервале определена производная $\frac{\partial X}{\partial \mu}(t, 0)$ и вычислить ее.

4. Пусть $X(t, t_0, x_0)$ — решение уравнения

$$\dot{x} = 2x + x^3 \operatorname{tg} t$$

с начальными данными (t_0, x_0). Вычислить производную $\frac{\partial X}{\partial x_0}(t, 3, 0)$ и указать максимальный интервал, на котором она определена.

5. Разложить в ряд по степеням μ (включая μ^2) решение $x(t, \mu)$ следующей задачи Коши:

$$\dot{x} = \sin(tx) + \mu x, \quad x(0, \mu) = \mu.$$

6. Разложить в ряд по степеням μ (до μ^1 включительно) 2π-периодическое решение уравнения Дуффинга

$$\ddot{x} + \omega^2 x = A \sin t + \mu x^3,$$

где ω — нецелое число.

Программу и задания
по дифференциальным уравнениям
составил д.ф.-м.н. М. В. Коробков

Дифференциальные уравнения

Лектор — Михаил Вячеславович Коробков

4-й семестр

6. Вариационное исчисление

Примеры задач классического вариационного исчисления: о брахистохроне, о поверхности вращения наименьшей площади, изопериметрической и о геодезических на сфере. Простейшая задача вариационного исчисления. Экстремали и экстремумы. Необходимое условие локального экстремума. Лемма Лагранжа. Уравнение Эйлера. Функционал и его вариация. Вариационные задачи, допускающие понижение порядка в уравнении Эйлера. Решение задач о брахистохроне и о поверхности вращения минимальной площади. Вариационная задача с несколькими неизвестными функциями. Вариационная задача с несколькими независимыми переменными. Задача со свободными концами. Изопериметрическая задача. Теорема Эйлера. Принцип взаимности. Решение классической изопериметрической задачи. Вариационная задача на условный экстремум. Правило множителей Лагранжа. Решение задачи о геодезических на сфере.

7. Краевые задачи

Понятие краевой задачи. Теорема об однозначной разрешимости краевой задачи. Структура решений в случае неоднозначной разрешимости. Сведение к задаче с однородными краевыми условиями и ее решение. Функция Грина краевой задачи. Условие ортогональности для разрешимости краевой задачи в случае неединственности решения.

Эквивалентность краевой задачи интегральному уравнению с непрерывным симметричным ядром. Следствия из теории интегральных уравнений: существование вещественных собственных значений; ортогональность (с весом) собственных функций. Специфика интегрального уравнения, связанная с краевой задачей: простота и односторонняя ограниченность спектра. Разложение в ряд по собственным функциям краевой задачи.

8. Введение в теорию устойчивости

Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость. Примеры. Общие теоремы об устойчивости линейных систем: эквивалентность устойчивости по Ляпунову ограниченности каждого решения, а асимптотической устойчивости — притяжению всех решений к нулевому решению. Устойчивость линейной системы с постоянными коэффициентами в терминах спектра и жордановой структуры матрицы коэффициентов. Идея метода функций Ляпунова. Производная в силу системы; примеры. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости в терминах функций Ляпунова. Теорема Четаева о неустойчивости. Квадратичная функция Ляпунова для системы $\dot{X} = AX$. Устойчивость по первому приближению положения равновесия автономной системы. Пример: маятник в вязкой жидкости.

9. Автономные системы

Основные свойства решений автономных систем. Фазовое пространство, движения, траектории. Три типа движений автономных систем. Предельное поведение движений автономных систем в $\mathbb{R}^n$. Предельные точки и предельные множества, их свойства. Движения без предельных точек и с одной предельной точкой. Классификация фазовых портретов линейных систем на плоскости: узел, седло, фокус, центр, вырожденный узел. Линеаризация нелинейных систем в окрестности положения равновесия — сохранение типов грубых особых точек. Предельные циклы. Поведение траекторий в окрестности предельного цикла. Функция последования Пуанкаре. Понятие грубого предельного цикла. Устойчивые, неустойчивые, полуустойчивые предельные циклы. Теорема Пуанкаре — Бендиксона о существовании предельного цикла для автономных систем на плоскости.

10. Первые интегралы и линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Связь первого интеграла с решением линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Теорема о числе независимых первых интегралов. Применение первых интегралов для понижения порядка системы уравнений. Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Литература

1. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.
3. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.
4. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.
5. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.
7. *Коробков М. В.* Функции Ляпунова: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2008.
8. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям.
9. *Александров В. А., Егоров А. А.* Вариационное исчисление: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2000.
10. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
11. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
12. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. / Под ред. В. К. Романко – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.

План семинаров

Вариационное исчисление

1. Простейшая задача вариационного исчисления. Задачи, допускающие понижение порядка в уравнении Эйлера. — 1 семинар
2. Вариационные задачи: с несколькими функциями, несколькими независимыми переменными. — 1 семинар
3. Задача со свободным концом. Изопериметрическая задача. Применение теоремы Эйлера и принципа взаимности. — 1 семинар
5. Условный экстремум. Использование правила множителей Лагранжа. — 1 семинар

Краевые задачи

1. Прямое решение краевых задач, регулярных и сингулярных — 0.5 семинара
2. Построение функции Грина и решение с ее помощью краевых задач — 1 семинар
3. Собственные значения и собственные функции краевых задач — 0.5 семинара

Теория устойчивости

1. Понятие устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости, неустойчивости. Исследование устойчивости путем прямого анализа решений уравнений и систем как функций начальных данных — 1 семинар
2. Устойчивость линейных систем и уравнений. Устойчивость в терминах спектра матрицы системы. Критерий Рауса — Гурвица. Исследование устойчивости с помощью теоремы об устойчивости по первому приближению — 1 семинар
3. Исследование устойчивости и неустойчивости с помощью функций Ляпунова и Четаева — 1 семинар

Автономные системы

1. Фазовые портреты линейных автономных систем: узлы, седла, фокусы, центры, вырожденные узлы	2 семинара
2. Линеаризация положения равновесия нелинейных автономных систем. Локальный фазовый портрет в окрестности положения равновесия. Соединение в глобальный фазовый портрет с помощью изоклин	1 семинар
3. Исследование предельных циклов	1 семинар

Первые интегралы

1. Нахождение первых интегралов и их применение для решения автономных систем	1 семинар
2. Решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка	1 семинар

Задания по дифференциальным уравнениям

4-й семестр

Задание 4 *(сдать до 20 марта)*

1. Доказать, что в случае $q(x) \leq 0$ краевая задача

$$y'' + q(x)y = 0, \quad y(x_1) = a, \quad y'(x_2) = b$$

при любых a, b и $x_1 \neq x_2$ имеет единственное решение. Доказать, что это решение — монотонная функция, если $a = 0$.

2. Решить сингулярную краевую задачу

$$2x^2y'' - xy' + y = 0, \quad y(x) = o(x) \quad \text{при} \quad x \to \infty, \quad y(1) + y'(1) = -1.$$

3. Точка массой 1 движется по прямой под действием непрерывной периодической силы $f(t)$ периода $T > 0$, подчиняясь уравнению

$$\ddot{x} = f(t).$$

Показать, что это уравнение имеет T-периодическое решение в том и только том случае, если функция $f\,(t)$ в среднем равна нулю:

$$\int\limits_0^T f(t)\,dt = 0.$$

Чему равна производная такого решения в момент $t = 0$?

4. Построить функцию Грина краевой задачи:

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y'(2) = 0.$$

5. Найти собственные значения и собственные функции дифференциального оператора

$$Ly \equiv x^2y'' + 3xy' - y$$

с краевыми условиями $y(1) = y(e) = 0$.

6. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^1 \Big({y'}^2(x) - 2xy(x)\Big)\,dx$$

при граничных условиях $y(0) = y(1) = 1$.

7. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^1 y(x){y'}^2(x)\,dx$$

при граничных условиях $y(0) = 1$, $y(1) = \sqrt[3]{4}$.

8. Найти экстремали функционала

$$I[y,z] = \int\limits_{-1}^1 \Big(2xy(x) + {y'}^2(x) - {z'}^2(x)\Big)\,dx$$

при граничных условиях $y(-1) = -1$, $y(1) = 1$, $z(-1) = 0$, $z(1) = 2$.

9. Написать уравнение Эйлера — Остроградского для функционала

$$I[z] = \iint\limits_D \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dxdy.$$

10. Найти положение равновесия тяжёлой однородной нити под действием силы тяжести, т. е. среди всех плоских линий длины l, концы которых находятся в заданных точках (x_0, y_0) и (x_1, y_1), найти ту, у которой ордината центра тяжести минимальна.

11. Найти форму поверхности однородной жидкости в цилиндрическом стакане, равномерно вращающейся вокруг оси стакана.

12. Решить задачу со свободным концом $J(y) = \int\limits_0^1 [2y + 6y' + (y')^2]dx$, $y(0) = 0$.

Задание 5 *(сдать до 20 апреля)*

1. Дано уравнение

$$\dot{x} = \begin{cases} e^t x^3 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Построив картину решений, выяснить, является ли решение $x(t) \equiv 0$ устойчивым по Ляпунову, асимптотически устойчивым.

2. Пусть $\dot{X} = AX$, A — действительная матрица, $\det A \neq 0$ и все решения ограничены на $\mathbb{R}^1$. Доказать, что нулевое решение системы $\dot{X} = A^2 X$ асимптотически устойчиво.

3. С помощью теоремы об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 1 - \cos y, \\ \dot{y} = \sin^2 x + 1 - e^y. \end{cases}$$

4. Указать все значения параметра a, при которых асимптотическая устойчивость и неустойчивость по Ляпунову нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2e^{-x} - \sqrt{4 + ay}, \\ \dot{y} = \ln(1 + 9x + ay) \end{cases}$$

может быть определена по спектру матрицы Якоби.

5. Найти все положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x - y + xy, \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$$

и исследовать их на устойчивость.

6. Решив систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \quad x/t - t^2 x y^2, \\ \dot{y} = -y/t, \end{cases}$$

исследовать на устойчивость ее нулевое решение.

7. С помощью функции Ляпунова исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^3 - 3x^2 y. \end{cases}$$

Исследовать также на устойчивость нулевое решение линеаризованной системы.

Задание 6 *(сдать до 25 мая)*

1. Построить фазовый портрет линейной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y, \\ \dot{y} = \quad x - 2y. \end{cases}$$

2. То же самое сделать для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \quad x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$$

3. Показать, что автономная система

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x\,(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = \quad x + y\,(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

имеет предельный цикл. Устойчив ли он? Найти решение задачи Коши $x(0) = 1, \;\; y(0) = 0$. Каков тип положения равновесия в начале координат? Построить фазовый портрет.

4. С помощью линеаризации выяснить типы положений равновесия нелинейной системы.

$$\begin{cases} \dot{x} = \quad 4x^2 - y^2, \\ \dot{y} = -4x + 2xy - 8. \end{cases}$$

Для каждого положения равновесия построить локальный фазовый портрет.

5. То же самое задание выполнить для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2(x-y)y, \\ \dot{y} = 2 + x - y^2. \end{cases}$$

6. Найдя два независимых первых интеграла, решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x+y), \\ \dot{y} = -y(x+y), \\ \dot{z} = -z(x-y) \end{cases}$$

в области $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

7. Найти общее решение и решить задачу Коши с указанным начальным условием

$$2xy\frac{\partial u}{\partial x} + (1 - y^2 - 2xz)\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$u = \frac{1}{2} - y^2$ при $y^2 + xz = 1$.

Программу и задания
по дифференциальным уравнениям
составил д.ф.-м.н. М. В. Коробков

Теория функций комплексного переменного

Лектор — Светлана Геннадьевна Бугаева

1. Аналитические функции комплексного переменного

Комплексные числа. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Предел последовательности комплексных чисел. Открытые, замкнутые, ограниченные и компактные множества на комплексной плоскости. Сфера Римана. Стереографическая проекция. Компактификация комплексной плоскости. Предел и непрерывность функции комплексного переменного. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши — Римана. Аналитические функции. Сопряженные гармонические функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Основные элементарные функции комплексного переменного: многочлены, рациональные функции, экспонента, гиперболические и тригонометрические функции. Теорема об обратной функции. Многозначные функции и точки ветвления. Ветви функций $\sqrt[n]{z}$ и $\operatorname{Ln} z$. Понятие римановой поверхности.

2. Интегрирование функций комплексного переменного

Интеграл функции комплексного переменного по ориентированной кривой. Общие свойства интеграла функции комплексного переменного по ориентированной кривой, связь с криволинейными интегралами. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши. Интегральные представления для производных. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции. Первообразная аналитической функции. Формула Ньютона — Лейбница. Теорема Мореры. Принцип максимума модуля аналитической функции.

3. Ряды аналитических функций

Числовые ряды. Функциональные ряды в комплексной области. Теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций. Степенные ряды: первая теорема Абеля, круг и радиус сходимости, аналитичность суммы степенного ряда. Вторая теорема Абеля. Ряд Тейлора.

Теорема единственности. Разложение основных элементарных функций в степенной ряд. Теорема о разложении аналитической в кольце функции в ряд Лорана. Единственность разложения в ряд Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана. Теорема Лиувилля. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Нули аналитической функции. Бесконечно удалённая особая точка. Поведение функции в окрестности изолированной существенно особой точки. Понятие о целых и мероморфных функциях.

4. Элементы теории вычетов

Вычет в конечной особой точке. Основная теорема теории вычетов. Формула для нахождения вычета в полюсе. Вычет в бесконечно удалённой точке. Интегрирование рационально-тригонометрических функций. Интегрирование рациональных функций. Преобразование Фурье рациональной функции. Лемма Жордана. Интегрирование рациональных выражений со степенным «весом». Интегралы типа бета-функции. Вычисление интегралов с логарифмическими особенностями. Вычисление интегралов в смысле главного значения по Коши. Принцип аргумента. Теорема Руше. Доказательство «основной теоремы алгебры».

5. Конформные отображения. Аналитическое продолжение

Понятие конформного отображения. Дробно-линейные функции. Функция Жуковского. Понятие аналитического продолжения. Степенные ряды как средство аналитического продолжения функций. Аналитическое продолжение гамма-функции. Интегралы, зависящие от параметра.

6. Преобразование Лапласа

Оригиналы и изображения. Аналитичность изображения. Линейность преобразования Лапласа. Формула обращения. Теорема подобия. Смещение изображения. Преобразование Лапласа производных и интегралов. Дифференцирование и интегрирование изображений. Применение преобразования Лапласа к решению начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Запаздывание оригинала. Свёртка оригиналов. Теорема Бореля об умножении изображений. Формула Дюамеля.

7. Асимптотические методы

Асимптотические сравнения и асимптотическая эквивалентность функций. Примеры асимптотических оценок. Асимптотические последовательности и ряды. Единственность асимптотического разложения. Арифметические операции с асимптотическими разложениями. Степенные асимптотические разложения. Асимптотические разложения аналитических функций. Идея метода Лапласа. Принцип локализации. Лемма Морса. Лемма Ватсона. Нахождение главного члена асимптотики интеграла Лапласа в типичных случаях. Асимптотика гамма-функции. Идея метода стационарной фазы. Метод стационарной фазы: вклад от концов промежутка интегрирования. Лемма Эрдейи. Метод стационарной фазы: вклад от невырожденной стационарной точки. Идея метода перевала. Перевальный контур. Лемма о линии наискорейшего спуска. Метода перевала: нахождение главного члена асимптотики.

Литература

1. Александров В. А. Преобразование Лапласа. Методические указания. НГУ, 1992. (Шифр библиотеки НГУ — В17 П723.)
2. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.
3. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1970.
4. Евграфов М. А. и др. Сборник задач по теории аналитических функций. М.: Наука, 1972.
5. Зорич В. А. Математический анализ. Т. 2. М.: Наука, 1984.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
7. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.–Л.: Физматгиз, 1963.
8. Леонтьева Т. А., Панферов В. С., Серов В. С. Задачи по теории функций комплексного переменного. М.: Изд-во МГУ, 1992.
9. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1967.
10. Привалов В. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977.

11. Романов А. С. Теория функций комплексного переменного. Записки лектора. (Только электронная версия: http://phys.nsu.ru/ok03/Manuals.html)
12. Романов А. С. Элементарные асимптотические методы. (Только электронная версия: http://phys.nsu.ru/ok03/Manuals.html)
13. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.
14. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. М.: Наука, 1976.

План семинаров

1. Комплексные числа. Функции комплексного переменного. Условия Коши — Римана. Аналитические функции.
2. Элементарные функции комплексного переменного: многочлены, экспонента, гиперболические, тригонометрические функции и обратные к ним: выделение ветвей.
3. Интегрирование функций комплексного переменного. Первообразная аналитической функции. Интегральная теорема Коши и формула Коши.
4. Степенные ряды. Ряд Тейлора.
5. Ряд Лорана. Особые точки.
6. Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов.
7. Вычисление интегралов от рациональных и рационально-тригонометрических функций. Преобразование Фурье рациональной функции.
8. Вычисление интегралов от рациональных выражений со степенным «весом», интегралов типа бета-функции и интегралов с логарифмическим весом.
9. Применение принципа аргумента и теоремы Руше.
10. Дробно-линейные функции. Функция Жуковского.
11. Преобразование Лапласа: оригиналы и изображения. Теоремы подобия и смещения, дифференцирование и интегрирование изображений и оригиналов. Решение начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.
12. Запаздывание и свёртка оригиналов. Теорема Бореля. Формула Дюамеля, формула обращения. Решение интегральных уравнений Вольтерра.

13. Асимптотические последовательности и разложения. Простейшие способы получения асимптотических разложений.
14. Метод Лапласа.
15. Метод стационарной фазы.
16. Метод перевала.

Задания по теории функций комплексного переменного

Задание 1 (*сдать до 20 октября*)

1. При каких значениях вещественных параметров a и b функция $f(z) = (ax \sin x \operatorname{ch} y + by \cos x \operatorname{sh} y) + i(x \cos x \operatorname{sh} y - by \sin x \operatorname{ch} y)$ является аналитической? Для этих параметров записать $f(z)$ как функцию переменной z.
2. Найдите все корни уравнения $\sqrt{3}\cos z - \sin z = -4$.
3. Выясните, допускают ли следующие функции выделение однозначных ветвей в окрестностях указанных точек:
а) $\sqrt{z^2-1}$, $z_1{=}\infty$, $z_2{=}1$; б) $\operatorname{Ln}\dfrac{(z-2)(z+1)}{z+i}$, $z_1{=}\infty$, $z_2{=}{-i}$.
4. Найдите, чему равны интегралы Френеля

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\,dx, \qquad \int_0^\infty \cos x^2\,dx, \qquad \int_0^\infty \sin x^2\,dx.$$

5. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos(in)z^n$. Исследуйте сходимость ряда на границе круга сходимости.
6. Разложите функцию $f(z) = z\ln(z^2 - 4iz - 3)$ в степенной ряд с центром в точке $z_0 = 2i$. Найдите радиус сходимости полученного ряда. Исследуйте сходимость ряда на границе круга сходимости.
7. Найдите максимум модуля функции $\sin z$ на единичном круге $|z|{\le}1$.
8. Найдите разложение в ряд Тейлора в окрестности $z_0 = 0$ функции, удовлетворяющей указанным условиям: $(1 + z^2)f'(z) = 1$, $f(0) = 0$.
9. Разложите в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 2$ функцию $z^2\cos\frac{1}{z-2}$.

10. Найдите особые точки каждой из указанных ниже функций. Выясните характер изолированных особых точек и поведение функции на бесконечности. В изолированных особых точках вычислите вычеты.
а) $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$; б) $\dfrac{e^{1/z}}{(2+z)^2}$; в) $\dfrac{1}{1-\sqrt{2-z}}$.
Для последней функции рассмотрите обе её ветви.

Задание 2 (*сдать до 20 ноября*)

Вычислите интегралы:

11. $\displaystyle\int\limits_C \frac{z^2\,dz}{z^4-1}$, где C — окружность $(x-1)^2+(y-1)^2=2$, пробегаемая против часовой стрелки.

12. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z\,dz}{e^{z^2}-1}$.

13. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} z\cos\frac{z}{z+1}\,dz$.

14. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}$ $(a>b>0)$.

15. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin x\,dx}{(1+x^2)^2}$.

16. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{x}(x^3+1)}$.

17. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x\,dx}{x^2+a^2}$ $(a>0)$.

18. Найдите главное значение интеграла $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{(x^2+4)(x+1)}$.

19. Используя теорему Руше найдите количество корней уравнения $\operatorname{ch} z-5z^n+1=0$ в круге $|z|<2$, где $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

20. Найдите дробно-линейное отображение, переводящее соответственно точки 0, 1, 2 в точки 1, 2, ∞, и выясните, во что при этом отображении переходит нижняя полуплоскость.

21. Отобразите на верхнюю полуплоскость внешность единичного круга с разрезами по отрезку $[-3;-1]$ и лучу $[1;+\infty)$.

Задание 3 (*сдать до 31 декабря*)

22. Используя формулу обращения для преобразования Лапласа, вычислите интеграл $\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{\lambda z}}{z^3(z^2+1)}\,dz$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

23. Используя преобразование Лапласа, решите задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u' - 2u - 4v = \cos t, \\ v' + u + 2v = \sin t, \\ u(0) = v(0) = 0. \end{cases}$$

24. Используя преобразование Лапласа, решите интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$x(t) = 4e^t + 3t - 4 - \int\limits_0^t (t-s)x(s)\,ds, \quad t > 0.$$

25. Покажите, что последовательность функций $\varphi_n(z) = (z-1)z^{-2n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, является асимптотической при $z \to \infty$, а функция $f(z) = (1+z)^{-1}$ допускает асимптотическое разложение по этой последовательности.

26. Найдите асимптотические разложения неполных интегралов Френеля:

а) $\int\limits_0^x e^{it^2}\,dt$ при $x \to +0$; б) $\int\limits_x^{+\infty} e^{it^2}\,dt$ при $x \to +\infty$.

27. Найдите при $p \to +\infty$ асимптотическое разложение интеграла Лапласа $F(p) = \int\limits_0^\infty \frac{\cos t - 1}{t} e^{-pt}\,dt$,

а) используя лемму Ватсона;

б) разложив изображение в степенной ряд по параметру p.

28. Найдите при $\lambda \to +\infty$ главный член асимптотики интеграла

$$F(\lambda) = \int\limits_0^1 x^\lambda \cos^n \pi x\,dx.$$

29. Найдите при $\lambda \to +\infty$ главный член асимптотики интеграла

$$F(\lambda) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{i\lambda x^2}\, dx}{1+x^2}.$$

30. Найдите при $\lambda \to +\infty$ главный член асимптотики интеграла

$$F(\lambda) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

36. Используя метод перевала, найдите при $\lambda \to +\infty$ главный член асимптотики интеграла

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda\left(-\frac{t^2}{2}+it\right)}\, dt.$$

Программу и задания по ТФКП
составила к.ф.-м.н. С. Г. Бугаева

Система рейтинговых баллов в курсе ТФКП

В курсе ТФКП в 2010/2011 учебном году действует следующая система рейтинговых баллов.

Каждый студент в семестре должен выполнить три задания. В них 35 (13+11+11) задач (с учетом пунктов). За каждую задачу, сданную в срок, указанный в задании, студенту начисляется 10 баллов. Таким образом, в семестре можно заработать $35 \times 10 = 350$ баллов, назовем их «бонусными». Студент допускается к экзамену, если он сдал все задачи из всех заданий (за исключением, может быть, одной-двух, — на усмотрение преподавателя). Ведомость с проставленными допусками сдается в деканат до 31 декабря. Те из студентов, кто не успели получить допуск во время зачетной сессии, к основному экзамену не допускаются, но могут прийти на пересдачу, если к тому времени допуск получат. Следует заметить, что преподаватель не обязан принимать задачи по истечении зачетной сессии, и его согласие на встречу со студентами-должниками во время экзаменационной сессии — это акт доброй воли преподавателя, который может и не состояться.

Бонусные баллы учитываются при выставлении оценки за экзамен.

На экзамене студент получает два билета. Один из них (теоретический) содержит два теоретических вопроса, а второй (практический) — три стандартные задачи, подобные содержащимся в заданиях и охватывающие различные темы курса.

За ответ на каждый из теоретических вопросов билета студент может заработать 0, 100 или 200 баллов, что соответствует оценкам «удовлетворительно», «хорошо» или «отлично» по привычной шкале.

Студент зарабатывает за ответ 0 баллов, если он сформулировал определения и утверждения (теорему, лемму, формулу), содержащиеся в вопросе, но не смог привести доказательство или вывод.

Студент зарабатывает за ответ 100 баллов, если он сформулировал определения и утверждения, в целом знает доказательство, но не смог воспроизвести какой-либо его этап.

Студент зарабатывает за ответ 200 баллов, если он сформулировал определения и утверждения и привел все доказательства без ошибок.

За каждую правильно решенную задачу из практического билета дается 50 баллов. Под решением задачи понимается не только получение правильного ответа, но также необходимые пояснения по ходу решения: ссылки на используемую теорему, формулу и т.д.

Экзаменатор имеет право задать несколько дополнительных вопросов по темам курса, не отраженным в теоретическом билете.

Оценка на экзамене складывается из трех сумм: $\Sigma = \Sigma_b + \Sigma_t + \Sigma_p$, где Σ_b — количество бонусных баллов, заработанных студентом в семестре, Σ_t — количество баллов, полученных за ответ на теоретический билет, Σ_p — количество баллов, полученных за решение задач из практического билета. Каждая из сумм может равняться нулю.

В зависимости от набранных баллов Σ в ведомость проставляется следующая оценка за экзамен:

Σ	Оценка
$600 \leqslant \Sigma \leqslant 900$	отлично
$400 \leqslant \Sigma < 600$	хорошо
$200 \leqslant \Sigma < 400$	удовлетворительно
$0 \leqslant \Sigma < 200$	неудовлетворительно

Оценка «неудовлетворительно» также ставится в следующих двух случаях:

1) если студент не может ответить хотя бы на один вопрос из теоретического билета, т. е. не может сформулировать входящие в вопрос утверждения и сопутствующие ему определения;

2) если студент не отвечает хоть на один дополнительный вопрос.

Пример 1. Студент Иванов заработал в семестре 300 бонусных баллов, при ответе на теоретический билет получил еще 300 баллов. Его сумма $\Sigma = 600$ баллов, и ему нет необходимости решать задачи из практического билета, так как он получает оценку «отлично» и без решения оных.

Пример 2. Студент Петров набрал в семестре 200 бонусных баллов, при ответе на теоретический билет заработал еще 100 баллов. Его сумма $\Sigma = 300$ баллов. Чтобы получить оценку «удовлетворительно», этого количества баллов ему хватает. Но чтобы получить «хорошо», придется решить две задачи на свой выбор из практического билета.

Пример 3. Студент Сидоров набрал в семестре 100 бонусных баллов, при ответе на теоретический билет получил 0 баллов. Чтобы получить оценку «удовлетворительно», ему нужно решить две задачи на свой выбор из практического билета.

Задача. Студент Имярек набрал 50 бонусных баллов. Как ему нужно отвечать на теоретический билет и сколько задач нужно решить, чтобы получить за экзамен оценку «удовлетворительно»? А если студент набрал 0 бонусных баллов?

Систему рейтинговых баллов по ТФКП
разработала к.ф.-м.н. С. Г. Бугаева

Дополнительные главы дифференциальных уравнений

*Лекторы — Светлана Геннадьевна Бугаева,
Сергей Андреевич Тресков*

Спецкурс, 4-й семестр

В различных естетственных науках (физике, механике и др.) активно используются результаты и методы теории дифференциальных уравнений. К сожалению, в силу ограниченности учебного времени в рамках стандартного курса дифференциальных уравнений, читаемого на физическом факультете НГУ, некоторые важные разделы дифференциальных уравнений, применяемые в физике и механике, не удаётся изложить в достаточном объёме.

Основной целью спецкурса является знакомство слушателей с некоторыми темами и приложениями к физике и механике следующих разделов теории дифференциальных уравнений: аналитической теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем и теории бифуркаций.

1. Аналитическая теория дифференциальных уравнений

Ещё Коши показал, что при весьма широких предположениях относительно характера дифференциального уравнения его решения представляют собой аналитические функции комплексного переменного. Поэтому решения таких уравнений можно изучать обычными методами ТФКП. С этой точки зрения и ведётся исследование решений дифференциальных уравнений в аналитической теории дифференциальных уравнений.

1.1. Существование аналитического решения задачи Коши для нелинейных аналитических систем и уравнений n-го порядка. Теорема локальной единственности.

1.2. Линейная система с аналитическими коэффициентами, существование глобального решения в односвязной области. Теорема существования и единственности решения задачи Коши в односвязной области. Изоморфизм пространства решений однородной системы пространству $\mathbb{C}^n$.

1.3. Линейное уравнение n-го порядка с аналитическими коэффициентами, сведение к системе, решение с помощью степенных рядов.

1.4. Уравнения с регулярной особой точкой; разложение решения в обобщенно степенной ряд. Логарифмические решения.

1.5. Уравнения класса Фукса. Уравнение Гаусса, гипергеометрический ряд. Применение к классическим ортогональным многочленам (многочлены Лежандра и Якоби) и к уравнению Бесселя (функции Бесселя первого и второго рода).

1.6. Применение теории аналитических функций и функций Бесселя к исследованию плоского установившегося течения жидкости, плоской электростатической задачи, плоского волнового уравнения, пространственного волнового уравнения в цилиндрических и сферических координатах.

2. Элементы теории динамических систем и теории бифуркаций

Динамические системы являются удобным математическим аппаратом для описания физических, механических, биологических и других систем с конечным числом степеней свободы. Слово «бифуркация» означает «раздвоение» и употребляется как название любого скачкообразного изменения, происходящего при плавном изменении параметров в динамической системе. Будут изложены начальные сведения о бифуркациях фазовых портретов динамических систем.

2.1. Динамические системы и дифференциальные уравнения. Грубые системы. Бифуркации.

2.2. Динамические системы на прямой.

2.3. Динамические системы на плоскости.

2.3.1. Локальные бифуркации коразмерности 1.

2.3.2. Локальные бифуркации коразмерности 2.

2.3.3. Нелокальные бифуркации.

Литература

1. *Аносов Д. В.* Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем. М.: МЦНМО, 2008.

2. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

3. *Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П.* Динамические системы — 5: Теория бифуркаций // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 5.

4. *Босс В.* Лекции по математике: Дифференциальные уравнения. М.: УРСС, 2004. Т. 2.
5. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Издание 2-е. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
6. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Издание 8-е. Т. 3. Ч. 2. М.: Наука, 1969.

Программу спецкурса «Дополнительные
главы дифференциальных уравнений»
составили к.ф.-м.н. С.Г. Бугаева и доцент С.А. Тресков

Дополнительные главы теории функций комплексного переменного

Лектор — Александр Сергеевич Романов

Спецкурс, 4-й семестр

В различных разделах физики и техники широкое распространение получили методы, основанные на использовании результатов теории функций комплексного переменного. К сожалению, в силу ограниченности учебного времени в рамках стандартного курса теории функций, читаемого на физическом факультете НГУ, реально удается познакомить слушателей лишь с приложением теории вычетов к вычислению некоторых типов определенных интегралов.

Основной целью спецкурса является знакомство слушателей с достаточно широким кругом математических и физических задач, при решении которых существенным образом используются методы теории функций комплексного переменного.

I. Некоторые вопросы теории вычетов

Вычисление интегралов является важной задачей, возникающей в различных разделах естествознания. При этом применение теории вычетов основано на построении для каждого типа интегралов специальных контуров интегрирования. В дополнение к изучавшимся в основном курсе будут рассмотрены другие типы интегралов, в том числе интегралы, связанные с преобразованием Лапласа. Помимо этого теория вычетов содержит ряд утверждений о свойствах аналитических функций, которые имеют различные приложения.

1.1. Вычисление интегралов типа бета-функции.

1.2. Вычисление интегралов с логарифмическим весом.

1.3. Вычисление главного значения расходящихся несобственных интегралов.

1.4. Интегралы, связанные с формулой обращения преобразования Лапласа. Теоремы разложения.

1.5. Обращение степенных рядов. Формулы Бурмана — Лагранжа. Разложение в ряд решений трансцендентных уравнений.

1.6. Логарифмический вычет и его обобщения. Нахождение приближенных значений корней трансцендентных уравнений.

1.7. Разложение мероморфной функции на элементарные дроби.

II. Конформные отображения

Конформные отображения относятся к числу важнейших понятий математики и имеют обширные приложения в теории потенциала, при решении краевых задач уравнений математической физики, в гидродинамике, в электростатике и т.д. Как правило, решения различных задач удается найти для некоторых канонических областей, а знание конформного отображения области $D \subset C$ на каноническую позволяет получить решение и в области D.

2.1. Общие свойства конформных отображений. Теорема Римана. Плоскопараллельные векторные поля. Комплексный потенциал. Примеры плоских полей: *источник, вихрь, вихреисточник, диполь, простой слой, двойной слой.*

2.2. Формула Жуковского для подъемной силы.

2.3. Дробно - линейные отображения.

2.4. Отображения, осуществляемые элементарными функциями и их композициями.

2.5. Отображения круговых луночек, профили Жуковского.

2.6. Решение задачи Дирихле в полуплоскости с кусочно постоянными граничными значениями.

2.7 Интеграл Кристофеля — Шварца. Отображения многоугольников.

2.8. Гидродинамические интерпритации, обтекание препятствия плоским потоком с заданной скоростью на бесконечности:

а) поток во внешности замкнутой кривой;

б) поток в криволинейной полосе;

в) поток в криволинейной полуплоскости.

2.9. Примеры:

а) течение в полуплоскости с препятствием в виде отрезка ортогонального дну;

б) обтекание кругового цилиндра;

в) обтекание профилей Жуковского;

г) распределение температур в канале.

III. Метод перевала

В основе метода перевала лежит тот факт, что интеграл от аналитической функции не зависит от выбора контура, соединяющего две фиксированные точки. Это позволяет перейти от исходного интеграла к интегралу по специальному *перевальному* контуру, наиболее приспособленному для получения асимптотических оценок. При этом как раз нахождение перевального контура и представляет основную сложность.

3.1. Топологическая часть метода перевала – основные принципы нахождения перевального контура.

3.2. Аналитическая часть метода перевала – вычисление асимптотики интеграла по перевальному контуру.

3.3. Асимптотика функции Эйри.

3.4. Асимптотика коэффициентов рядов Тейлора и Лорана аналитических функций.

3.5. Асимптотика преобразования Лапласа.

IV. Специальные функции

Специальными функциями называют часто встречающиеся в различных задачах математической физики функции, которые, как правило, не выражаются через *элементарные функции* и определяются при помощи специального вида интегралов или рядов. Основные классы специальных функций являются решениями специальных дифференциальных уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами.

4.1. Цилиндрические функции: различные представления, производящая функция, асимптотика, ортогональность, ряды Фурье – Бесселя.

4.2. Примеры применения цилиндрических функций при решении задач математической физики.

4.3. Эллиптические интегралы.

Программу спецкурса
«Дополнительные главы
теории функций комплексного переменного»
составил д.ф.-м.н. А. С. Романов