Основы функционального анализа

Лектор — Виктор Алексеевич Александров

3-й семестр

1. Ряды Фурье

Понятие ряда Фурье 2π-периодической функции и задача о разложении периодической функции в ряд Фурье. Ряд Фурье функции с произвольным периодом. Разложения только по синусам или только по косинусам. Лемма Римана — Лебега. Ядро Дирихле. Теорема о представимости функции в точке своим рядом Фурье. Разложение функции $f(x) = \frac{\pi}{4}\operatorname{sign} x$, $x \in (-\pi, \pi)$ в ряд Фурье и применение получившегося ряда Фурье к суммированию числового ряда. Комплексная форма ряда Фурье. Теоремы о дифференцировании и интегрировании рядов Фурье. Задача о наилучшем приближении, теорема о наилучшем приближении и неравенство Бесселя для тригонометрических рядов. Равномерная сходимость рядов Фурье. Явление Гиббса. Теорема о гладкости функции и скорости сходимости её ряда Фурье (без доказательства). Равенство Ляпунова, обобщённое равенство Ляпунова и равенство Ляпунова в комплексной форме. Применение рядов Фурье к нахождению функции, гармонической в круге, по её значениям на границе. Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении тригонометрическими и алгебраическими многочленами.

Литература: основная — 4; дополнительная — 10, 13, 18.

2. Преобразование Фурье

Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье. Теорема о представимости функции в точке своим интегралом Фурье. Представление функции интегралом Фурье на полупрямой. Прямое и обратное синус- и косинус-преобразования Фурье. Вычисление синус- и косинус-преобразования Фурье функции $f(x) = e^{-ax}$, $x > 0$, $a > 0$. Представление функции $f(x) = e^{-ax}$ её интегралом Фурье и вычисление интегралов Лапласа. Комплексная форма интеграла Фурье. Преобразование Фурье и формула обращения. Вычисление прямого и обратного преобразования Фурье от функции e^{-ax^2}, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Быстро убывающие функции: определение, примеры и основные свойства.

Преобразование Фурье быстро убывающих функций: определение и основные свойства. Равенство Парсеваля. Свёртка быстро убывающих функций: определение и свойства. Формула Пуассона. Теорема Котельникова — Шеннона и её применение в теории цифровой передачи информации. Применение преобразования Фурье к решению уравнения теплопроводности. Понятие о дискретном преобразовании Фурье.

Литература: основная — 3; дополнительная — 7, 10, 13, 18.

3. Обобщённые функции

Пространства основных и обобщённых функций. Примеры обобщённых функций: регулярные обобщённые функции, δ-функции, $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x \pm i0}$. Формулы Сохоцкого. Сходимость обобщённых функций: наводящие соображения и определение. Дельта-образные последовательности. Теорема о пределе дельта-образных последовательностей. Плотность тела, вся масса которого сосредоточена в одной точке. Линейная замена переменной в обобщённой функции: наводящие соображения, определение, вычисление выражений $\delta(-x)$ и $\delta(x - x_0)$. Умножение обобщённых функций на бесконечно дифференцируемые: наводящие соображения, определение, вычисление выражений $a(x)\delta(x)$ и $x\mathcal{P}\frac{1}{x}$. Невозможность умножения произвольных обобщённых функций. Нелинейная замена переменной в одномерной дельта-функции: определение и теорема (без доказательства). Дифференцирование обобщённых функций: наводящие соображения, определение, примеры. Плотность заряда электрического диполя. Теорема о связи классической и обобщённой производных для кусочно-гладкой функции. Вычисление фундаментального решения трёхмерного оператора Лапласа. Свёртка обобщённых функций: наводящие соображения, определение, свойства, примеры вычисления. Теорема о фундаментальном решении линейного обыкновенного дифференциального оператора. Решение дифференциальных уравнений в пространстве обобщённых функций: как решают неоднородные уравнения, как решают однородные и как удовлетворяют граничным условиям. Простейший вариант теоремы вложения Соболева (без доказательства). Пространство обобщённых функций медленного роста. Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста: наводящие соображения, определение, свойства, примеры вычисления.

Литература: основная — 2; дополнительная — 8, 13, 16, 19.

4. Геометрия пространств со скалярным произведением

Линейные пространства: определение, линейная зависимость векторов, размерность пространства, подпространство. Примеры линейных пространств и подпространств. Нормированные линейные пространства: определение нормы, открытые и замкнутые множества, сходимость последовательности, замыкание множества, фундаментальная последовательность, полнота и сепарабельность пространства. Пример незамкнутого подпространства. Лебеговские функциональные пространства $L_p(G)$: определение и интегральные неравенства Гёльдера и Минковского (без доказательства). Полнота и сепарабельность лебеговских пространств, плотность множества гладких функций в них (без доказательства). Линейные пространства со скалярным произведением (евклидовы и унитарные): определение и примеры. Неравенство Коши — Буняковского в пространстве со скалярным произведением. Норма, порождённая скалярным произведением. Непрерывность скалярного произведения по первому аргументу. Равенство параллелограмма. Гильбертово пространство. Угол между векторами. Ортогональность векторов. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Ортогональное проектирование. Задача о наилучшем приближении — проектирование на конечномерные подпространства. Коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы. Неравенство Бесселя. Гильбертов базис. Теорема о существовании гильбертова базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Ряд Фурье элемента гильбертова пространства. Теорема о представлении элемента его рядом Фурье. Равенство Парсеваля. Замкнутость ортонормированной системы. Теорема Рисса — Фишера и теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств. Критерий полноты ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тригонометрическая система функций как пример полной ортогональной системы.

Литература: основная — 1; дополнительная — 5, 6, 9, 10, 12, 13, 15, 17.

Литература

1. *Александров В. А.* Геометрия пространств со скалярным произведением: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1995.
2. *Александров В. А.* Обобщённые функции: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2005.

3. *Александров В. А.* Преобразование Фурье: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2002.
4. *Александров В. А.* Ряды Фурье: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1996.
5. *Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Выш. шк., 1978.
6. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
7. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
8. *Зорич В. А.* Математический анализ. М.: Наука, 1984. Т. 2.
9. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
11. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. М.: Мир, 1978. Т. 1.
12. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982.
13. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М.; Л.: ГИТТЛ, 1941. Т. 4.
14. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Т. 3.
15. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965.

План семинаров

1-й семинар. — Разложение 2π-периодических функций в ряд Фурье. Разложение только по синусам или только по косинусам.

2-й семинар. — Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом. Комплексная форма ряда Фурье. Разложение в ряд Фурье функций вида

$$\frac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}, \quad |a|<1,$$

без вычисления интегралов.

3-й семинар. — Равенство Ляпунова. Суммирование числовых рядов с помощью рядов Фурье.

4-й семинар. — Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов Фурье.

5-й семинар. — Представление функции её интегралом Фурье. Разложение на полупрямой.

6-й семинар. — Общие свойства преобразования Фурье: сдвиг по фазе, сдвиг по аргументу, производная от преобразования Фурье и преобразование Фурье от производной. Нахождение преобразования Фурье конкретных функций.

7-й семинар. — Нахождение преобразования Фурье конкретных функций. Свёртка. Формула Пуассона.

8-й семинар. — Применение преобразования Фурье к решению уравнения Лапласа в полуплоскости.

9-й семинар. — Основные и обобщённые функции. Сходимость обобщённых функций. Дифференцирование обобщённых функций.

10-й семинар. — Применение теоремы о фундаментальном решении обыкновенного дифференциального оператора и нахождение фундаментального решения двумерного оператора Лапласа и/или оператора $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$.

11-й семинар. — Умножение обобщённых функций на бесконечно дифференцируемые. Линейная и нелинейная замены переменных в обобщённых функциях. Свёртка обобщённых функций.

12-й семинар. — Обобщённые функции медленного роста и преобразование Фурье от них.

13-й семинар. — Простейшие свойства сходимости в гильбертовом пространстве: всякая сходящаяся последовательность фундаментальна, ограничена и имеет не более одного предела; всякое конечномерное подпространство замкнуто. Парадоксальные свойства бесконечномерных гильбертовых пространств: существование незамкнутых подпространств и возможность поместить бесконечно много попарно непересекающихся шаров фиксированного радиуса в единичный шар.

14-й семинар. — Поляризационые тождества. Вычисление углов в гильбертовом пространстве. Кривая Винера. Равенство параллелограмма.

15-й семинар. — Процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Полные ортонормированные системы, состоящие из многочленов, ступенчатых функций и тригонометрических функций. Задача наилучшего приближения.

16-й семинар. — Нахождение ортогонального дополнения к подпространству. Изоморфизм гильбертовых пространств. Вычисление суммы внутренних углов произвольного треугольника.

17-й семинар. — Повторный разбор наиболее трудных вопросов.

Задания по основам функционального анализа

Задание 1 *(сдать до 10 октября)*

Ряды Фурье

1. Нарисуйте график и найдите ряд Фурье функции заданной на промежутке $[-\pi, \pi]$ равенством $f(x) = |x|$, и предполагая, что она имеет период 2π.

2. Разложите функцию $f(x) = x^2$ в ряд Фурье по синусам на промежутке $(0, \pi)$.

3. Используя предыдущую задачу, найдите сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

4. Докажите, что функция f, определённая на отрезке $[-\pi, \pi]$, является нечётной (т. е. для всех $x \in [-\pi, \pi]$ удовлетворяет соотношению $f(-x) = -f(x)$), если и только если коэффициенты c_n её комплексного ряда Фурье связаны соотношениями $c_n = -c_{-n}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

5. Представьте функцию $\ln(1 - 2a\cos x + a^2)$ в виде комплексного, а затем — в виде вещественного ряда Фурье, считая, что $|a| < 1$.

6. Пусть функция f непрерывна в промежутке $[-\pi, \pi]$ и имеет в нём (за исключением разве лишь конечного числа точек) производную f', интегрируемую с квадратом. Докажите, что если при этом выполнены условия

$$f(-\pi) = f(\pi) \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0,$$

то имеет место неравенство

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\, dx \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2\, dx,$$

называемое неравенством Виртингера, причём равенство в нём имеет место лишь для функций вида $f(x) = A\cos x + B\sin x$.

7. Рассмотрим однородный тонкий стержень с концами $x = 0$ и $x = \pi$. Измеренную в момент времени t температуру точки этого стержня с координатой x обозначим через $u(t, x)$. Как известно, с течением времени перераспределение температуры в стержне происходит таким образом, что функция u удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где a — некоторая постоянная, называемому уравнением теплопроводности. Предполагая, что на обоих концах стержня поддерживается постоянная температура, скажем, равная нулю, и предполагая известным начальное распределение тепла т. е. предполагая, что $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ и $u(0, x) = f(x)$), найдите решение уравнения теплопроводности.

Преобразование Фурье

8. Считая параметр a положительным докажите формулу

$$2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2} \cos 2yx \, dy = \begin{cases} \pi(1 - |x|), & \text{если } |x| \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

9. Найдите функцию f, если

$$\int\limits_0^{+\infty} f(y) \sin xy \, dy = xe^{-x^2}, \qquad x > 0.$$

10. Найдите прямое и обратное преобразования Фурье функции $f(x) = xe^{-a|x|}$, $a > 0$.

Задание 2 *(сдать до 15 ноября)*

11. Найдите обратное преобразование Фурье функции

$$\frac{y}{(y^2 + a^2)^2}.$$

12. Рассмотрим быстро убывающую функцию $\varphi\,(x)$ вещественной переменной x и её преобразование Фурье $\psi\,(p)$, которое, как вы знаете,

тоже быстро убывает с ростом модуля p, причём функции $\varphi(x)$ и $\psi(p)$ имеют общую L_2-норму. Пусть она равна единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(p)|^2\, dp = 1.$$

В таком случае мы вправе считать функции $|\varphi(x)|^2$ и $|\psi(p)|^2$ плотностями распределения вероятностей случайных величин x и p, которые, в свою очередь, можно интерпретировать, например, как координату и импульс «одномерной» квантовой частицы.

Интегралы

$$x_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, |\varphi(x)|^2\, dx \quad \text{и} \quad p_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} p\, |\psi(p)|^2\, dp$$

имеют смысл средних значений случайных величин x и p при заданных их распределениях, а степень «разброса» этих величин около их средних значений характеризуют их среднеквадратические отклонения — положительные числа $\sigma(\varphi)$ и $\sigma(\psi)$, определяемые равенствами

$$\sigma^2(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2\, |\varphi(x)|^2\, dx \quad \text{и} \quad \sigma^2(\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (p - p_0)^2\, |\psi(p)|^2\, dp.$$

Ваша задача — доказать одно из самых красивых и удивительных неравенств, какие можно встретить в математике и которое было открыто физиком:

$$\sigma(\varphi)\,\sigma(\psi) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Это неравенство представляет собой строгое математическое выражение знаменитого принципа неопределённости Гейзенберга, согласно которому нельзя одновременно измерить, например, координату и импульс квантовой частицы — уточняя одно, мы непременно теряем информацию о другом.

Доказательство проведите по следующей схеме. Наряду с функциями $\varphi(x)$ и $\psi(p)$ рассмотрим еще одну пару функций

$$\Phi(x) = e^{-ip_0\,(x + x_0/2)}\, \varphi(x + x_0) \quad \text{и} \quad \Psi(p) = e^{ix_0\,(p + p_0/2)}\, \psi(p + p_0).$$

Как легко видеть, $\Psi\,(p)$ служит преобразованием Фурье функции $\Phi\,(x)$.

(а) Докажите, что новые функции имеют те же L_2-нормы, что и прежние:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi\,(x)|^2\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Psi\,(p)|^2\, dp = 1,$$

но относительно них средние значения x и p уже равны нулю:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,|\Phi\,(x)|^2\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p\,|\Psi(p)|^2\, dp = 0.$$

Убедитесь также, что произведённая нами «нормировка» распределений случайных величин x и p не меняет их дисперсий:

$$\sigma^2(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2|\Phi\,(x)|^2\, dx \quad \text{и} \quad \sigma^2\,(\psi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p^2|\Psi(p)|^2\, dp.$$

(б) Опираясь на равенство Парсеваля, а также на связь, которую преобразование Фурье устанавливает между дифференцированием и умножением на аргумент, для каждого вещественного t докажите равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |tx\Phi\,(x) + \Phi'(x)|^2\, dx = t^2\sigma^2(\varphi) - t + \sigma^2\,(\psi).$$

(в) Вам остаётся заметить, что появившийся здесь вещественный квадратный многочлен — по своему происхождению — неотрицателен, и исследовать его дискриминант.

13. Вычислите свёртку $e^{-|x|} * e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

Обобщённые функции

14. Докажите, что для любого $m \geqslant 0$ в пространстве обобщённых функций $x^m e^{iax} \to 0$ при $a \to \pm\infty$.

15. Трактуя несобственный интеграл как предел, вычисленный в пространстве обобщённых функций, соответствующих собственных

интегралов, докажите равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\,dy = \delta(x).$$

16. Докажите равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x-k).$$

17. Докажите равенство

$$|\cos x|'' + |\cos x| = 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\bigl(x - \frac{\pi}{2} - \pi k\bigr).$$

18. Пусть a и v — постоянные и $E(x,t)$ — регулярная обобщённая функция, заданная на плоскости формулой

$$E(x,t) = \begin{cases} a, & \text{если } x^2 \leqslant v^2t^2 \text{ и } t \geqslant 0; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вычислите выражение

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$

в смысле теории обобщённых функций. В зависимости от данного v подберите постоянную a так, чтобы E было фундаментальным решением оператора

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

19. Вычислите свёртку $\delta''(x) * |x|$.

20. Найдите фундаментальное решение оператора

$$\frac{d}{dx} + 2x,$$

т. е. решите обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'(x) + 2xy\,(x) = \delta\,(x).$$

Задание 3 *(сдать до 30 декабря)*

21. Найдите преобразование Фурье регулярной обобщённой функции медленного роста, заданной формулой $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Геометрия пространств
со скалярным произведением

22. Докажите, что сложение векторов в гильбертовом пространстве непрерывно.

23. Докажите, что любом в унитарном пространстве справедливо так называемое поляризационное тождество

$$(x, y) = \frac{1}{4}\Big[(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) - i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)\Big].$$

24. Докажите, что в пространстве $L_p[a,b]$ можно ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства, если и только если $p = 2$.

25. Найдите углы треугольника, чьи вершины расположены в точках $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = t$, и $x_3(t) = (3t^2 - 1)/2$ евклидова пространства $L_2[0,1]$.

26. Предполагая, что $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < 1$, ортонормируйте n кусочно гладких функций

$$x_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant t_k; \\ 0, & \text{если } t_k < t \leqslant 1, \end{cases}$$

$(k = 1, 2, \ldots, n)$ в евклидовом пространстве $L_2[0,1]$.

27. Проверьте, что функции $\{\sqrt{2/\pi}\sin nt\}$, $n = 1, 2, \ldots$, образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2[0,\pi]$.

28. Убедитесь, что в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ функции, указанные в задаче 27, образуют ортогональную систему, не являющуюся базисом.

29. Для функции $x(t) = e^t$ найдите многочлены $y_n(t)$ степени $n = 0, 1, 2$ такие, что норма $\|x(t) - y_n(t)\|$, вычисленная в пространстве $L_2[-1,1]$, минимальна.

30. В пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ найдите ортогональное дополнение к подпространству, состоящему из многочленов с нулевой суммой коэффициентов.

Программу и задания
по основам функционального анализа
составил д.ф.-м.н. В. А. Александров

Основы функционального анализа

Лектор — Виктор Алексеевич Александров

4-й семестр

5. Ортогональные многочлены

Ортогональные многочлены как результат ортогонализации последовательности мономов. Общие свойства ортогональных многочленов. Свойства нулей ортогональных многочленов. Классические ортогональные многочлены и их свойства (без доказательства). Многочлены Лежандра: производящая функция, рекуррентные соотношения, дифференциальное уравнение, соотношения ортогональности, формула Родрига. Разложение функций в ряды по многочленам Лежандра. Мультипольное разложение кулонова потенциала. Применение многочленов Лежандра при решении дифференциальных уравнений в частных производных. Поле точечного заряда, помещённого внутри полой проводящей сферы.

Многочлены Эрмита и Лагерра (*изучаются только на семинарах*): производящая функция, рекуррентные соотношения, дифференциальное уравнение, соотношения ортогональности, формула Родрига. Разложение функций в ряды по многочленам Эрмита и Лагерра. Функции Эрмита и Лагерра.

Литература: основная — 3.

6. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

Линейные операторы, их общие свойства. Непрерывные и ограниченные операторы. Норма оператора. Сходимость операторов. Обратный оператор. Теорема Неймана. Спектр оператора. Резольвента. Простейшие свойства спектра. Линейные функционалы. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса. Бра-векторы и кет-векторы. Оператор, сопряжённый ограниченному, его простейшие свойства. Применение сопряжённого оператора при нахождении спектра. Ограниченные самосопряжённые операторы: теоремы о спектре, норме и инвариантном подпространстве. Компактные операторы: определения и простейшие свойства. Теорема о дискретности точечного спектра компактного оператора. Компактные самосопряжённые операторы: теорема о точечном спектре и теорема Гильберта — Шмидта. Спектральное разложение компактного самосопряжённого оператора. Вариационный принцип Куранта отыскания собственных значений самосопряжённого компактного оператора (без доказательства). Приближённый способ отыскания собственных значений возмущённого оператора (наводящие соображения).

Литература: основная — 1, 2; дополнительная — 5–11.

7. Интегральные уравнения

Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра и примеры задач, к ним приводящих. Интегральный оператор Гильберта — Шмидта. Решение уравнений с вырожденным ядром. Альтернатива Фредгольма. Уравнения с малым параметром. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений. Интегральные уравнения с симметричными ядрами. Теорема Гильберта — Шмидта для интегральных операторов. Разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра. Разложение повторного ядра интегрального оператора по его собственным функциям. Теорема Мерсера.

Литература: основная — 4; дополнительная — 5, 8.

8. Неограниченные операторы в гильбертовых пространствах

Неограниченные симметрические и самосопряжённые операторы: определения и примеры. Замкнутый оператор, замыкание и расширение оператора, существенно самосопряжённый оператор: определения и примеры. Критерий самосопряжённости оператора. Критерий существенной самосопряжённости оператора. Спектральная теорема для самосопряжённых неограниченных операторов.

Литература: 6, 7, 9.

Литература

1. *Абашеева Н. Л.* Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах в примерах и хадачах: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 2007.

2. *Александров В. А.* Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1996.

3. *Александров В. А.* Ортогональные многочлены: Метод. указания. Новосибирск: НГУ, 1993.
4. *Александров В. А., Колесников Е. В.* Интегральные уравнения: Метод. указания. Новосибирск: НГУ, 1993.
5. *Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Выш. шк., 1978.
6. *Боум А.* Квантовая механика: основы и приложения. М.: Мир, 1990.
7. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
9. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. М.: Мир, 1978. Т. 1.
10. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982.
11. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М.; Л.: ГИТТЛ, 1959. Т. 5.

План семинаров

1-й семинар. — Общие свойства ортогональных многочленов.

2-й семинар. — Многочлены Эрмита: производящая функция; вывод и использование рекуррентных формул, соотношений ортогональности и дифференциального уравнения; разложение функций в ряды по многочленам Эрмита.

3-й семинар. — Многочлены Лагерра: производящая функция; вывод и использование рекуррентных формул, соотношений ортогональности и дифференциального уравнения; разложение функций в ряды по многочленам Лагерра.

4-й семинар. — Многочлены Лежандра: применение производящей функции, рекуррентных формул и соотношений ортогональности; разложение функций в ряды по многочленам Лежандра.

5-й семинар. — Линейные функционалы.

6-й семинар. — Вычисление нормы ограниченного оператора и оператора, обратного к данному.

7-й и *8-й семинары.* — Спектр и резольвента ограниченного оператора.

9-й семинар. — Бра-векторы и кет-векторы. Компактные операторы.

10-й семинар. — Сведе́ние дифференциальных уравнений к интегральным и наоборот. Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром.

11-й семинар. — Альтернатива Фредгольма. Повторные ядра и резольвента интегрального уравнения.

12-й семинар. — Собственные значения и собственные функции интегральных уравнений с симметричным ядром. Решение неоднородных уравнений Фредгольма с симметричным ядром.

13-й семинар. — Сопряжённые, симметричные и самосопряжённые неограниченные операторы. Критерий самосопряжённости неограниченного операотра.

14-й семинар. — Замкнутые операторы, замыкание и расширение оператора, существенно самосопряжённые операторы. Критерий существенной самосопряжённости оператора. Спектральная теорема для самосопряжённых неограниченных операторов.

15-й семинар. — Повторный разбор наиболее трудных вопросов.

Задания по основам функционального анализа

Задание 4 *(сдать до 15 марта)*

Геометрия пространств со скалярным произведением *(продолжение)*

Ортогональные многочлены

1. Как известно, многочлены Чебышёва первого рода $T_n(x)$ ортогональны на промежутке $(-1, 1)$ с весом $1/\sqrt{1-x^2}$. Для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ докажите, что

(а) функция $\cos(n \arccos x)$ является многочленом степени n и

(б) многочлен $T_n(x)$ пропорционален $\cos(n \arccos x)$, т. е. докажите равенство $T_n(x) = C_n \cos(n \arccos x)$, где C_n — некоторая постоянная.

2. Докажите тождество

$$e^{x^2} H_n(x) = -\frac{d}{dx} e^{x^2} H_{n-1}(x),$$

где H_n — многочлен Эрмита, стандартизованный с помощью производящей функции, т. е. такой, что

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n.$$

3. Вычислите интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x H_n(x) H_{n+1}(x)\, dx.$$

4. Разложите функцию $|x|$ в ряд по многочленам Эрмита.

5. Как вы знаете, многочлены Лагерра $L_n^\alpha(x)$ можно определить как коэффициенты тейлоровского разложения по переменной t их производящей функции

$$w\,(x, t, \alpha) = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{\alpha+1}},$$

так что

$$w\,(x, t, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x)\, t^n.$$

Используя легко проверяемое соотношение

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x, t, \alpha) = -tw(x, t, \alpha + 1),$$

выведите для любого натурального n формулу

$$\frac{\partial L_n^\alpha}{\partial x}(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x).$$

6. Вычислите интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha+1} L_n^\alpha(x) L_{n+1}^\alpha(x)\, dx.$$

7. Как вам известно, функция

$$w\,(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}$$

служит производящей функцией для многочленов Лежандра $P_n(x)$ в том смысле, что

$$w\,(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n.$$

Покажите, что

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

8. Вы знаете, что последовательность производных любых классических ортогональных многочленов в свою очередь является последовательностью классических ортогональных многочленов, причём с тем же промежутком ортогональности (но, конечно, с другим весом).

(а) Убедитесь, что последовательность производных

$$P_1'(x), P_2'(x), \dots, P_n'(x), \dots$$

многочленов Лежандра ортогональна на промежутке $(-1,1)$ с весом $h(x) = 1 - x^2$.

(б) Найдите квадрат нормы многочлена $P_n'(x)$ в пространстве $L_2^h(-1,1)$, т. е. вычислите интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)(P_n'(x))^2\,dx.$$

Другими словами, в этой задаче вам предложено (а) убедиться, что производные многочленов Лежандра пропорциональны ультрасферическим многочленам $C_n(x;\lambda)$ при $\lambda = 3/2$ и (б) найти соответствующие коэффициенты пропорциональности.

Задание 5 *(сдать до 25 апреля)*

Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

В задачах 9–15 $A : l_2 \to l_2$ обозначает «диагональный» линейный оператор, действующий по правилу:

$$A : (x_1,\ x_2,\ x_3, \dots) \mapsto (a_1x_1,\ a_2x_2,\ a_3x_3, \dots),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — фиксированная ограниченная последовательность комплексных чисел.

9. Докажите, что оператор A непрерывен и найдите его норму.

10. Выясните является ли оператор A обратимым и если является, то найдите A^{-1}.

11. Опишите сопряжённый к A оператор и выясните, когда оператор A самомопряжён. Выясните, когда оператор A унитарен.

12. Найдите точечный спектр оператора A.

13. Найдите непрерывный спектр оператора A.

14. Найдите остаточный спектр оператора A. Укажите резольвентное множество оператора A.

15. Докажите, что оператор A компактен если и только если $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

16. Если S является замкнутым подпространством гильбертова пространства H, то, как вы знаете, всякий вектор x из H единственным образом представляется в виде суммы $y + z$, где y лежит в S, а z ортогонален S. При этом оператор P, сопоставлящий вектору x вектор y, называется оператором проектирования на S, что записывают формулой $Px = y$. Найдите спектр (точечный, непрерывный, остаточный) и резольвентное множество оператора проектирования.

17. Покажите, что используя «бра» и «кет» обозначения оператор проектирования P на подпространство, натянутое на вектор x, можно задать формулой $P = |x\rangle\langle x|$.

18. Пусть операторы A и B заданы формулами

$$Ax(t) = \frac{\cos t}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} x\,(s) \cos s \, ds \qquad \text{и} \qquad Bx(t) = t \int\limits_0^{t} x(s)\, ds.$$

Докажите, что они преобразуют гильбертово пространство $L_2\,[0, 2\pi]$ в себя. Считая пространство $L_2\,[0, 2\pi]$ областью определения этих операторов, найдите асмптотические выражения для собственных значений оператора $A + \varepsilon B$ при $\varepsilon \to 0$.

19. Рассмотрим в унитарном гильбертовом пространстве H ограниченный линейный оператор A. Если A самосопряжён, т. е. $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всех x и y из H, то отвечающая ему форма (Ax, x), очевидно, вещественна. Вы легко убедитесь в этом. Любопытно, что верно и обратное утверждение: если форма (Ax, x) вещественна, то оператор A самосопряжён. Именно это вам и предлагается доказать.

Подсказка: обратите внимание на числа вида $(A\,(x+cy), x+cy)$, не забыв о том, что они вещественны, так что мы можем записать их в виде $(x+cy, A\,(x+cy))$. В частности, это верно для $c=1$ и $c=i$. Отсюда — один шаг до «решающей» системы равенств:

$$(Ax,y)+(Ay,x)=(x,Ay)+(y,Ax),$$
$$(Ax,y)-(Ay,x)=(x,Ay)-(y,Ax).$$

Задание 6 *(сдать до 30 мая)*

Интегральные уравнения

20. Составьте интегральное уравнение, отвечающее задаче Коши

$$x'''(t)+tx(t)=e^t,$$
$$x(0)=1, x'(0)=x''(0)=0.$$

21. Решите интегральное уравнение, сведя его к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$x(t)=4e^t+3t-4-\int\limits_0^t (t-s)x(s)\,ds.$$

22. Найдите все решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром

$$x(t)-\mu\int\limits_{-1}^{1}(t^2s^2+4ts+1)x(s)\,ds=2\pi^2\cos 2\pi t.$$

Рассмотрите все возможные значения параметра μ.

23. Исследуйте разрешимость предыдущего уравнения при различных значениях параметра μ с помощью альтернативы Фредгольма.

24. Найдите повторные ядра и резольвентное ядро, а также представьте через резольвентное ядро решение интегрального уравнения

$$x(t)-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 te^sx(s)\;=e^{-t}.$$

25. Найдите собственные значения и собственные функции интегрального уравнения

$$x(t) - \mu \int\limits_0^\pi K(t,s)x(s)\,ds = 0$$

с симметричным ядром, сводя его к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения, если

$$K(t,s) = \begin{cases} \sin s \cos t, & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant s; \\ \cos s \sin t, & \text{если} \quad s \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

26. Пусть $f \in L_2[0,\pi]$, а число μ не является собственным значением оператора A из предыдущей задачи. Найдите разложение решения интегрального уравнения $x - \mu Ax = f$ по собственным функциям оператора A.

27. Докажите, что при выполнении условий теоремы Мерсера, т. е. если ядро K непрерывно, симметрично и все его собственные значения μ_n, за исключением, может быть, конечного их числа, имеют одинаковый знак, то справедливо равенство

$$\sum_n \frac{1}{\mu_n^2} = \int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,s)|^2\,dt\,ds.$$

Неограниченные операторы в гильбертовых пространствах

28. Пусть $A : H \to H$ и $B : H \to H$ — самосопряжённые линейные операторы и пусть вектор $x \in H$ таков, что ABx и BAx определены (в частности это означает, что определены также Ax и Bx). Докажите, что при этих предположениях справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}\big|([A,B]x,x)\big| \leqslant \|Ax\| \cdot \|Bx\|,$$

где $[A,B] = AB - BA$ — коммутатор операторов A и B.

Отметим на будущее, что в квантовой механике вводят обозначение $\langle A\rangle_x = (Ax,x)$, переписывают неравенство этой задачи в виде

$$\langle A^2\rangle_x \langle B^2\rangle_x \geqslant \frac{1}{4}\langle [A,B]\rangle_x^2$$

и интерпретируют его как принцип неопределённости Гейзенберга.

29. Пусть областью определения оператора $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, заданного формулой

$$A = \frac{1}{i}\frac{d}{dt} + t,$$

служит один из двух подклассов гладких функций $x(t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ с граничными условиями:

$$\text{(а) } x(0) = x(1);$$

$$\text{(б) } x(0) = x(1) = 0.$$

Будет ли оператор A хоть в одном из этих случаев симметричным? А самосопряжённым? Каким станет оператор A, если отменить все граничные условия на гладкие функции, составляющие его «классическую» область определения?

Программу и задания
по основам функционального анализа
составил д.ф.-м.н. В. А. Александров

Дифференциальные уравнения

Лектор — Михаил Вячеславович Коробков

3-й семестр

1. Уравнения первого порядка

Уравнение $y' = f(x, y)$. Определение решения. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения и его решений. Поле направлений, порождаемое дифференциальным уравнением. Непродолжаемое решение. Задача Коши. Теорема Пеано существования решения. Теорема Пикара существования и единственности решения. Уравнение с разделяющимися переменными. Однородные и квазиоднородные уравнения. Линейное уравнение. Уравнение Бернулли. Общее поле направлений на плоскости, интегральные линии, связь с решениями дифференциального уравнения. Уравнение в полных дифференциалах. Интеграл поля направлений. Интегрирующий множитель и уравнение в частных производных для него. Автомодельный множитель и критерий его существования. Автомодельный множитель для однородного поля направлений. Интегрирующий множитель уравнения Дарбу.

2. Системы дифференциальных уравнений

Нормальные системы. Запись системы в векторной форме. Теорема Пикара для нормальных систем. Теорема о покидании компакта. Поведение непродолжаемых решений в «вертикальной полосе». Уравнение $y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, сведение к системе, постановка задачи Коши. Теорема существования и единственности. Системы, разрешенные относительно старших производных, сведение к нормальным системам.

Методы понижения порядка дифференциальных уравнений.

3. Общая теория линейных систем

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы $\dot{X} = A(t)X + F(t)$. Линейность пространства $\mathcal{L}$ всех непродолжаемых решений однородной системы $\dot{X} = A(t)X$, его изоморфность пространству $\mathbb{R}^n$. Размерность $\mathcal{L}$. Фундаментальные системы решений (ФСР). Фундаментальные матрицы и их свойства.

Определитель Вронского, его связь с линейной зависимостью решений. Формула Лиувилля — Остроградского. Принцип суперпозиции, связь решений неоднородной и однородной системы. Построение частного решения методом Лагранжа вариации произвольных постоянных.

Линейное уравнение n-го порядка, сведение к линейной системе. Изоморфизм между пространствами непродолжаемых решений однородного уравнения и соответствующей системы. Теория линейного уравнения n-го порядка как следствие теории линейных систем.

Комплексные линейные системы, сведение к действительным системам.

4. Линейные системы с постоянными коэффициентами

Линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами, построение ФСР. Частное решение в случае квазиполиномиальной неоднородности.

Построение ФСР для системы $\dot{X} = AX$ с постоянными коэффициентами при помощи базиса Жордана матрицы A. Частное решение в случае квазиполиномиальной неоднородности. Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения линейных однородных и неоднородных систем уравнений.

Малые колебания систем со многими степенями свободы; векторы нормальных колебаний. Вынужденные колебания с неоднородностью в форме квазиполинома. Периодические решения линейных уравнений, представление их рядами Фурье; резонанс.

5. Зависимость решений от начальных данных и параметров

Непрерывная зависимость решений системы от начальных данных и параметров. Дифференцируемость решений по начальным данным и параметрам. Класс гладкости решения соответствующий гладкости правой части системы. Уравнения в вариациях и постановка Задачи Коши для производных решения по начальным данным и по параметрам. Получение соответствующих теорем для уравнения произвольного порядка как следствие из теории систем. Применение теории гладкой зависимости решений — метод малого параметра в теории нелинейных колебаний. Теорема Пуанкаре о существовании и единственности периодического решения, стремящегося к периодическому решению порождающего (невозмущенного) уравнения. Применение теоремы Пуанкаре к случаю линейного нерезонансного порождающего уравнения. Разложение периодического решения в асимптотический ряд по малому параметру.

Существование аналитического решения задачи Коши для нелинейных аналитических систем и уравнений n-го порядка. Построение решений с помощью степенны и обобщенно-степенных рядов. Уравнение Бесселя; функции Бесселя первого и второго рода.

Литература

1. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.
3. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.
4. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.
6. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям.
7. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
8. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. / Под ред. В. К. Романко – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.

План семинаров

Уравнения первого порядка

1. Поле направлений, изоклины, Задача Коши. Уравнения с разделяющимися переменными	2 семинара
2. Однородное уравнение	1 семинар
3. Линейное уравнение, уравнение Бернулли	1 семинар
4. Уравнение в полных дифференциалах, интегрирующий множитель, уравнение Дарбу	1 семинар

Уравнения высшего порядка

1. Постановка Задачи Коши. Существование и единственность решения. Уравнения, допускающие понижение порядка	2 семинара

Линейные системы

1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами, однородные и неоднородные. Уравнение Эйлера.	2 семинара
2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами, формула Остроградского-Лиувилля	1 семинар
3. Линейные системы с постоянными коэффициентами	2 семинара
4. Малые колебания систем	1 семинар
5. Периодические решения линейного уравнения; ряды Фурье	1 семинар

Зависимость решений от начальных данных и параметров

1. Дифференцируемость по начальным данным и параметрам; уравнения в вариациях	1 семинар
2. Метод малого параметра для периодических решений в теории нелинейных колебаний	1 семинар

Задания по дифференциальным уравнениям

Задание 1 *(сдать до 15 октября)*

1. С помощью изоклин построить картину решений уравнения $y' = x - y^2$. Исследовать выпуклость решений, найти линию перегиба. Указать области определения решений и наличие асимптот в зависимости от начальных условий.

2. Записать решение уравнения

$$y' = \sqrt[3]{\frac{y^2+1}{x^4+1}}$$

в виде интегралов с определенными пределами. Доказать следующие утверждения:

а) каждое непродолжаемое решение $y(x)$ определено для всех $x \in \mathbb{R}$;

б) каждая интегральная кривая имеет две горизонтальные асимптоты.

Указать, какой тип симметрии имеет картина решений.

3. Найти общее решение уравнения

$$(x+4y)y' = 2x+3y-5.$$

4. Пусть функция f непрерывна и ограничена на всей оси: $|f(x)| \le m$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Для уравнения

$$y' = 4y\sin^2 x + f(x)$$

доказать утверждения:

а) существует решение $y^*(x)$, $-\infty < x < +\infty$, ограниченное на $\mathbb{R}$, и такое решение только одно; дать его формулу; верхнюю границу его модуля оценить через m;

б) если функция $f(x)$ имеет период, кратный π, то и $y^*(x)$ — периодическая функция с тем же периодом.

5. Рассмотрим уравнение:

$$y' = \frac{4y}{x} + 2x\sqrt{|y|}.$$

а) Дать картину решений; показать, что она симметрична относительно оси Oy.

б) Написать непродолжаемое решение и указать интервал его существования для задачи Коши $y(1)=1$.

в) Выяснить, сколько непродолжаемых решений имеет задача Коши $y(1)=-1$.

6. Для поля направлений Дарбу

$$(2x^2y^2+y)dx + (x^3y-x)dy = 0$$

а) написать уравнения интегральных линий;

б) дать картину всех решений.

7. Рассмотрим уравнение

$$y''' + y\,y'' = 0.$$

Пусть $y(x)$, (α,ω) — некоторое его непродолжаемое решение, причем для некоторого $x_0 \in (\alpha,\omega)$ справедливо равенство $y''(x_0)=0$. Доказать, что $(\alpha,\omega)=(-\infty,+\infty)$ и $y''(x)\equiv 0$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

8. Решить задачу Коши

$$4yy'' + (4y^2-1)(y')^6 + (y')^2 = 0, \quad y(2)=1, \quad y'(2)=1.$$

9. Решить задачу Коши

$$(1-\sin x)yy'' + yy'\cos x = (y')^2, \quad y(0)=2, \;\; y'(0)=1.$$

10. Решить задачу Коши

$$x^4y'' - x^2y(y')^2 + 2xy'y^2 = y^3, \quad y(2)=2, \;\; y'(2)=1.$$

Задание 2 *(сдать до 25 ноября)*

1. Уравнение Лежандра $(1-t^2)\ddot{x} - 2t\dot{x} + 6x = 0$ имеет решение в виде полинома. Найти его методом неопределенных коэффициентов и, пользуясь им, построить второе линейно независимое решение.

2. Методом вариации произвольных постоянных найти решение уравнения

$$\ddot{x} - x = (4t^2+1)/t\sqrt{t}.$$

3. Пусть A — постоянная $n \times n$ матрица с действительными элементами и n — нечетно. Предположим, что каждое решение системы $\dot{X} = AX$ ограничено на всей оси. Доказать: $\det A = 0$.

4. Построить фундаментальную систему решений уравнения $\dot{X} = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение уравнения $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = e^t \sin t + e^{-t}\sin t$.

6. Найти векторы нормальных колебаний и написать общее решение системы

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0, \\ M\ddot{x}_2 + k(2x_2 - x_1 - x_3) = 0, \\ m\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) = 0, \end{cases}$$

описывающей продольные колебания молекулы CO_2.

Задание 3 *(сдать до 25 декабря)*

1. Найти периодическое решение уравнения $\ddot{x} - x = f(t)$, где

$$f(t) = \begin{cases} t, \text{ если } 0 \le t \le 1, \\ 2-t, \text{ если } 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

и $f(t+2) \equiv f(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

2. Существует ли периодическое решение уравнения $\ddot{x}+9x = \sin^3 t$? Построить общее решение.

3. Пусть $X(t,\mu)$ — решение задачи Коши $X(0,\mu) = 1+\mu$ для уравнения $\dot{x} = x^2+\mu^2 t$. Указать, на каком максимальном интервале определена производная $\frac{\partial X}{\partial \mu}(t,0)$, и вычислить ее.

4. Пусть $X(t,t_0,x_0)$ — решение уравнения $\dot{x} = 2x + x^3 \operatorname{tg} t$ с начальными данными (t_0,x_0). Вычислить производную $\frac{\partial X}{\partial x_0}(t,3,0)$ и указать максимальный интервал, на котором она определена.

5. Разложить в ряд по степеням μ (включая μ^2) решение $x(t,\mu)$ следующей задачи Коши:

$$\dot{x} = \sin(tx) + \mu x, \quad x(0,\mu) = \mu.$$

6. Разложить в ряд по степеням μ (до μ^1 включительно) 2π-периодическое решение уравнения Дуффинга $\ddot{x}+\omega^2 x = A\sin t + \mu x^3$, где ω — нецелое число.

Программу и задания
по дифференциальным уравнениям
составил д.ф.-м.н. М. В. Коробков

Дифференциальные уравнения

Лектор — Михаил Вячеславович Коробков

4-й семестр

6. Вариационное исчисление

Примеры задач классического вариационного исчисления: о брахистохроне, о поверхности вращения наименьшей площади, изопериметрической и о геодезических на сфере. Простейшая задача вариационного исчисления. Экстремали и экстремумы. Необходимое условие локального экстремума. Лемма Лагранжа. Уравнение Эйлера. Функционал и его вариация. Вариационные задачи, допускающие понижение порядка в уравнении Эйлера. Решение задач о брахистохроне и о поверхности вращения минимальной площади. Вариационная задача с несколькими неизвестными функциями. Вариационная задача с высшими производными. Вариационная задача с несколькими независимыми переменными. Задача со свободными концами. Изопериметрическая задача. Теорема Эйлера (без доказательства). Принцип взаимности. Решение классической изопериметрической задачи. Вариационная задача на условный экстремум. Правило множителей Лагранжа (без доказательства). Решение задачи о геодезических на сфере.

7. Краевые задачи

Понятие краевой задачи. Теорема об однозначной разрешимости краевой задачи. Структура решений в случае неоднозначной разрешимости. Сведение к задаче с однородными краевыми условиями и ее решение. Функция Грина краевой задачи. Условие ортогональности для разрешимости краевой задачи в случае неединственности решения. Теорема Штурма.

Эквивалентность краевой задачи интегральному уравнению с непрерывным симметричным ядром. Следствия из теории интегральных уравнений: существование вещественных собственных значений; ортогональность (с весом) собственных функций. Специфика интегрального уравнения, связанная с краевой задачей: простота и односторонняя ограниченность спектра. Разложение в ряд по собственным функциям краевой задачи. Понятие сингулярной краевой задачи. Различные постановки.

8. Введение в теорию устойчивости

Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость. Примеры. Общие теоремы об устойчивости линейных систем: эквивалентность устойчивости по Ляпунову ограниченности каждого решения, а асимптотической устойчивости — притяжению всех решений к нулевому решению. Устойчивость линейной системы с постоянными коэффициентами в терминах спектра и жордановой структуры матрицы коэффициентов. Идея метода функций Ляпунова. Производная в силу системы; примеры. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости в терминах функций Ляпунова. Теорема Четаева о неустойчивости. Квадратичная функция Ляпунова для системы $\dot{X} = AX$. Устойчивость по первому приближению положения равновесия автономной системы. Пример: маятник в вязкой жидкости.

9. Автономные системы

Основные свойства решений автономных систем. Фазовое пространство, движения, траектории. Периодические движения, группа периодов. Классификация замкнутых подгрупп аддитивной группы действительных чисел. Три типа движений автономных систем. Предельное поведение движений автономных систем в $\mathbb{R}^n$. Предельные точки и предельные множества, их свойства. Движения без предельных точек и с одной предельной точкой. Классификация фазовых портретов линейных систем на плоскости: узел, седло, фокус, центр, вырожденный узел. Линеаризация нелинейных систем в окрестности положения равновесия — сохранение типов грубых особых точек. Предельные циклы. Поведение траекторий в окрестности предельного цикла. Функция последования Пуанкаре. Понятие грубого предельного цикла. Устойчивые, неустойчивые, полуустойчивые предельные циклы. Теорема Пуанкаре — Бендиксона о существовании предельного цикла для автономных систем на плоскости. Вращение векторного поля на плоскости. Индекс особой точки. Вращение поля вдоль замкнутой кривой и сумма индексов особых точек внутри нее. Следствие о числе особых точек разного типа внутри замкнутой траектории.

10. Первые интегралы и линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Связь первого интеграла с решением линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Теорема о числе независимых первых интегралов. Применение первых интегралов для понижения порядка системы уравнений. Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Литература

1. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.
3. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.
4. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.
5. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.
7. *Коробков М. В.* Функции Ляпунова: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2008.
8. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям.
9. *Александров В. А., Егоров А. А.* Вариационное исчисление: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2000.
10. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
11. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
12. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. / Под ред. В. К. Романко – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.

План семинаров

Вариационное исчисление

1. Простейшая задача вариационного исчисления. Задачи, допускающие понижение порядка в уравнении Эйлера.	1 семинар
2. Вариационные задачи: с несколькими функциями, несколькими независимыми переменными, с высшими производными.	1 семинар

3. Задача со свободным концом.
   Изопериметрическая задача. Применение
   теоремы Эйлера и принципа взаимности. — 1 семинар
4. Условный экстремум. Использование правила
   множителей Лагранжа. — 1 семинар

Краевые задачи

1. Прямое решение краевых задач,
   регулярных и сингулярных — 0.5 семинара
2. Построение функции Грина и решение
   с ее помощью краевых задач — 1 семинар
3. Собственные значения и собственные
   функции краевых задач — 0.5 семинара

Теория устойчивости

1. Понятие устойчивости по Ляпунову,
   асимптотической устойчивости, неустойчивости.
   Исследование устойчивости путем прямого анализа
   решений уравнений и систем как функций
   начальных данных — 1 семинар
2. Устойчивость линейных систем и уравнений.
   Устойчивость в терминах спектра матрицы системы.
   Критерий Рауса — Гурвица. Исследование
   устойчивости с помощью теоремы об устойчивости
   по первому приближению — 1 семинар
3. Исследование устойчивости и неустойчивости
   с помощью функций Ляпунова и Четаева — 1 семинар

Автономные системы

1. Фазовые портреты линейных автономных систем:
   узлы, седла, фокусы, центры, вырожденные узлы — 2 семинара
2. Линеаризация положения равновесия
   нелинейных автономных систем. Локальный фазовый
   портрет в окрестности положения равновесия.
   Соединение в глобальный фазовый портрет
   с помощью изоклин — 1 семинар
3. Исследование предельных циклов — 1 семинар

Первые интегралы

1. Нахождение первых интегралов
   и их применение для решения автономных систем — 1 семинар
2. Решение линейного однородного уравнения
   в частных производных первого порядка — 1 семинар

Задания по дифференциальным уравнениям

Задание 4 *(сдать до 20 марта)*

1. Доказать, что в случае $q(x) \leqslant 0$ краевая задача

$$y'' + q(x)y = 0, \quad y(x_1) = a, \quad y'(x_2) = b$$

при любых a, b и $x_1 \neq x_2$ имеет единственное решение. Доказать, что это решение — монотонная функция, если $b = 0$.

2. Решить сингулярную краевую задачу

$$2x^2y'' - xy' + y = 0, \quad y(x) = o(x) \quad \text{при} \quad x \to \infty, \quad y(1) + y'(1) = -1.$$

3. Точка массой 1 движется по прямой под действием непрерывной периодической силы $f(t)$ периода $T > 0$, подчиняясь уравнению $\ddot{x} = f(t)$. Показать, что это уравнение имеет T-периодическое решение в том и только том случае, если функция $f(t)$ в среднем равна нулю:

$$\int\limits_0^T f(t)\,dt = 0.$$

Чему равна производная такого решения в момент $t = 0$?

4. Построить функцию Грина краевой задачи:

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y'(2) = 0.$$

5. Найти собственные значения и собственные функции дифференциального оператора $Ly \equiv x^2y'' + 3xy' - y$ с краевыми условиями $y(1) = y(e) = 0$.

6. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^1 \left(y'^2(x) - 2xy(x)\right) dx$$

при граничных условиях $y(0) = y(1) = 1$.

7. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^1 y(x)y'^2(x)\,dx$$

при граничных условиях $y(0) = 1$, $y(1) = \sqrt[3]{4}$.

8. Найти экстремали функционала

$$I[y,z] = \int\limits_{-1}^{1} \left(2xy(x) + {y'}^2(x) - {z'}^2(x) \right) dx$$

при граничных условиях $y(-1) = -1$, $y(1) = 1$, $z(-1) = 0$, $z(1) = 2$.

9. Написать уравнение Эйлера — Остроградского для функционала

$$I[z] = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 dxdy.$$

10. Найти положение равновесия тяжёлой однородной нити под действием силы тяжести, т. е. среди всех плоских линий длины l, концы которых находятся в заданных точках (x_0, y_0) и (x_1, y_1), найти ту, у которой ордината центра тяжести минимальна.

11. Найти форму поверхности однородной жидкости в цилиндрическом стакане, равномерно вращающейся вокруг оси стакана.

12. Решить задачу со свободным концом $J(y) = \int\limits_0^1 [2y + 6y' + (y')^2] dx$, $y(0) = 0$.

Задание 5 *(сдать до 20 апреля)*

1. Дано уравнение

$$\dot{x} = \begin{cases} e^t x^3 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Построив картину решений, выяснить, является ли решение $x(t) \equiv 0$ устойчивым по Ляпунову, асимптотически устойчивым.

2. Пусть $\dot{X} = AX$, $\quad A$ — действительная матрица, $\det A \neq 0$ и все решения ограничены на $\mathbb{R}^1$. Доказать, что нулевое решение системы $\dot{X} = A^2 X$ асимптотически устойчиво.

3. С помощью теоремы об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 1 - \cos y, \\ \dot{y} = \sin^2 x + 1 - e^y. \end{cases}$$

4. Указать все значения параметра a, при которых асимптотическая устойчивость и неустойчивость по Ляпунову нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2e^{-x} - \sqrt{4+ay}, \\ \dot{y} = \ln(1+9x+ay) \end{cases}$$

может быть определена по спектру матрицы Якоби.

5. Найти все положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x - y + xy, \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$$

и исследовать их на устойчивость.

6. Решив систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \quad x/t - t^2xy^2, \\ \dot{y} = -y/t, \end{cases}$$

исследовать на устойчивость ее нулевое решение.

7. С помощью функции Ляпунова исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^3 - 3x^2y. \end{cases}$$

Исследовать также на устойчивость нулевое решение линеаризованной системы.

Задание 6 *(сдать до 25 мая)*

1. Построить фазовый портрет линейной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y, \\ \dot{y} = \quad x - 2y. \end{cases}$$

2. То же самое сделать для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \quad x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$$

3. Показать, что уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

имеет периодическое решение (ненулевое).

4. Показать, что автономная система

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x\,(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = \quad x + y\,(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

имеет предельный цикл. Устойчив ли он? Найти решение задачи Коши $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Каков тип положения равновесия в начале координат? Построить фазовый портрет.

5. С помощью линеаризации выяснить типы положений равновесия нелинейной системы.

$$\begin{cases} \dot{x} = \quad 4x^2 - y^2, \\ \dot{y} = -4x + 2xy - 8. \end{cases}$$

Для каждого положения равновесия построить локальный фазовый портрет.

6. То же самое задание выполнить для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2(x - y)y, \\ \dot{y} = 2 + x - y^2. \end{cases}$$

7. Пусть внутри замкнутой траектории на плоскости имеется ровно одно положение равновесия. Может ли оно быть седлом? Нарисовать фазовый портрет системы, у которой внутри замкнутой траектории имеется седло.

8. Найдя два независимых первых интеграла, решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x + y), \\ \dot{y} = -y(x + y), \\ \dot{z} = -z(x - y) \end{cases}$$

в области $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

9. Найти общее решение и решить задачу Коши с указанным начальным условием

$$2xy\frac{\partial u}{\partial x} + (1 - y^2 - 2xz)\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$u = \frac{1}{2} - y^2$ при $y^2 + xz = 1$.

Программу и задания
по дифференциальным уравнениям
составил д.ф.-м.н. М. В. Коробков

Теория функций комплексного переменного

Лектор — Светлана Геннадьевна Бугаева

3-й семестр

1. Аналитические функции комплексного переменного

Комплексные числа. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Предел последовательности комплексных чисел. Открытые, замкнутые, ограниченные и компактные множества на комплексной плоскости. Сфера Римана. Стереографическая проекция. Компактификация комплексной плоскости. Предел и непрерывность функции комплексного переменного. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши — Римана. Аналитические функции. Сопряженные гармонические функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения. Дробно-линейные функции. Основные элементарные функции комплексного переменного: многочлены, рациональные функции, экспонента, гиперболические и тригонометрические функции. Теорема об обратной функции. Многозначные функции и точки ветвления. Ветви функций $\sqrt[n]{z}$ и $\operatorname{Ln} z$. Понятие римановой поверхности.

2. Интегрирование функций комплексного переменного

Интеграл функции комплексного переменного по ориентированной кривой. Общие свойства интеграла функции комплексного переменного по ориентированной кривой, связь с криволинейными интегралами. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши. Интегральные представления для производных. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции. Первообразная аналитической функции. Формула Ньютона — Лейбница. Теорема Мореры. Принцип максимума модуля аналитической функции.

3. Ряды аналитических функций

Числовые ряды. Функциональные ряды в комплексной области. Теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций. Степенные ряды: первая теорема Абеля (без доказательства), круг и радиус сходимости, аналитичность суммы степенного ряда. Вторая теорема Абеля (без доказательства). Ряд Тейлора. Теорема единственности. Разложение основных элементарных функций в степенной ряд. Теорема о разложении аналитической в кольце функции в ряд Лорана. Единственность разложения в ряд Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана. Теорема Лиувилля. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Нули аналитической функции. Бесконечно удалённая особая точка. Поведение функции в окрестности изолированной существенно особой точки. Понятие о целых и мероморфных функциях.

4. Элементы теории вычетов

Вычет в конечной особой точке. Основная теорема теории вычетов. Формула для нахождения вычета в полюсе. Вычет в бесконечно удалённой точке. Интегрирование рационально-тригонометрических функций. Интегрирование рациональных функций. Преобразование Фурье рациональной функции. Лемма Жордана. Интегрирование рациональных выражений со степенным «весом». Интегралы типа бета-функции. Вычисление интегралов с логарифмическими особенностями. Вычисление интегралов в смысле главного значения по Коши. Принцип аргумента. Теорема Руше. Доказательство «основной теоремы алгебры». Понятие аналитического продолжения. Степенные ряды как средство аналитического продолжения функций. Аналитическое продолжение гамма-функции. Интегралы, зависящие от параметра.

5. Преобразование Лапласа

Оригиналы и изображения. Аналитичность изображения. Линейность преобразования Лапласа. Формула обращения. Теорема подобия. Смещение изображения. Преобразование Лапласа производных и интегралов. Дифференцирование и интегрирование изображений. Применение преобразования Лапласа к решению начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Запаздывание оригинала. Свёртка оригиналов. Теорема Бореля об умножении изображений. Формула Дюамеля.

6. Асимптотические методы

Асимптотические сравнения и асимптотическая эквивалентность функций. Примеры асимптотических оценок. Асимптотические последовательности и ряды. Единственность асимптотического разложения. Арифметические операции с асимптотическими разложениями. Степенные асимптотические разложения. Асимптотические разложения аналитических функций. Идея метода Лапласа. Принцип локализации (без доказательства). Лемма Морса. Лемма Ватсона. Нахождение главного члена асимптотики интеграла Лапласа в типичных случаях. Асимптотика гамма-функции. Идея метода стационарной фазы. Метод стационарной фазы: вклад от концов промежутка интегрирования. Лемма Эрдейи. Метод стационарной фазы: вклад от невырожденной стационарной точки. Идея метода перевала. Перевальный контур. Лемма о линии наискорейшего спуска. Метода перевала: нахождение главного члена асимптотики (без доказательства).

Литература

1. *Александров В.А.* Преобразование Лапласа. Методические указания. НГУ, 1992. (Шифр библиотеки НГУ — В17 П723.)
2. *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.
3. *Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1970.
4. *Евграфов М.А.* и др. Сборник задач по теории аналитических функций. М.: Наука, 1972.
5. *Зорич В.А.* Математический анализ. Т. 2. М.: Наука, 1984.
6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
7. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.–Л.: Физматгиз, 1963.
8. *Леонтьева Т.А., Панферов В.С., Серов В.С.* Задачи по теории функций комплексного переменного. М.: Изд-во МГУ, 1992.
9. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1967.
10. *Привалов В.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977.

11. *Романов А.С.* Теория функций комплексного переменного. Записки лектора. (Только электронная версия: `http://phys.nsu.ru/ok03/Manuals.html`)
12. *Романов А.С.* Элементарные асимптотические методы. (Только электронная версия: `http://phys.nsu.ru/ok03/Manuals.html`)
13. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И* Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.
14. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 1. М.: Наука, 1976.

План семинаров

1. Комплексные числа. Сфера Римана. Стереографическая проекция.
2. Функции комплексного переменного. Условия Коши — Римана. Аналитические функции. Элементарные функции комплексного переменного: многочлены, экспонента, гиперболические и тригонометрические функции.
3. Дробно-линейные функции. Функция Жуковского.
4. Логарифм, обратные гиперболические и обратные тригонометрические функции: выделение ветвей. Построение римановых поверхностей простейших аналитических функций.
5. Интегрирование функций комплексного переменного. Первообразная аналитической функции. Интегральная теорема Коши и формула Коши.
6. Степенные ряды. Ряд Тейлора.
7. Ряд Лорана. Особые точки.
8. Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов.
9. Вычисление интегралов от рациональных и рационально-тригонометрических функций. Преобразование Фурье рациональной функции.
10. Вычисление интегралов от рациональных выражений со степенным «весом», интегралов типа бета-функции и интегралов с логарифмическими особенностями.
11. Применение принципа аргумента и теоремы Руше.
12. Преобразование Лапласа: оригиналы и изображения. Теоремы подобия и смещения, дифференцирование и интегрирование изображений и оригиналов. Решение начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

13. Запаздывание и свёртка оригиналов. Теорема Бореля. Формула Дюамеля, формула обращения. Решение интегральных уравнений Вольтерра.
14. Асимптотические последовательности и разложения. Простейшие способы получения асимптотических разложений.
15. Метод Лапласа.
16. Метод стационарной фазы.
17. Метод перевала.

Задания по теории функций комплексного переменного

Задание 1 (*сдать до 10 октября*)

Аналитические функции комплексного переменного

1. Найдите все значения выражений:
а) $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}$; б) $\mathrm{Ln}(-3-4i)$; в) $(1+i)^{1-2i}$.
Изобразите их (схематично) на комплексной плоскости.
2. Опишите и изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $|z| > 1 - \mathrm{Re}\, z$.
3. При каком преобразовании сферы Римана образ точки z переходит в образ точки $1/z$.
4. Найдите все корни уравнения $\sqrt{3}\cos z - \sin z = -4$.
5. Найдите множество точек, в которых угол поворота равен нулю при отображении $f(z) = \sin z$.
6. Найдите дробно-линейное отображение, переводящее соответственно точки 0, 1, 2 в точки 1, 2, ∞, и выясните, во что при этом отображении переходит верхняя полуплоскость.
7. Опишите и изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $0 < \arg \frac{i-z}{z+2i} < \pi/2$.
8. Отобразите на верхнюю полуплоскость внешность единичного круга с разрезами по отрезку $[-3;1]$ и лучу $[1;+\infty)$.
9. Выясните, допускают ли следующие функции выделение однозначных ветвей в окрестностях указанных точек:
а) $\sqrt[4]{z+1}$, $z_1=-1$, $z_2=1$; б) $\sqrt{\dfrac{2-z}{z+i}}$, $z_1=\infty$, $z_2=-2$, $z_3=2$;
в) $\sqrt{z^2-1}$, $z_1=\infty$, $z_2=1$; г) $\ln\dfrac{(z-2)(z+1)}{z+i}$, $z_1=\infty$, $z_2=-i$, $z_3=0$.

Задание 2 (*сдать до 10 ноября*)

Интегрирование функций комплексного переменного

10. Вычислите интеграл от функции $\overline{z}\,|z|^2$ вдоль замкнутого контура, состоящего из полуокружности $\{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ и отрезка $\{\operatorname{Im} z = 0, |\operatorname{Re} z| \leqslant 1\}$.
11. Найдите, чему равны интегралы Френеля

$$\int\limits_0^\infty e^{ix^2}\,dx, \qquad \int\limits_0^\infty \cos x^2\,dx, \qquad \int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx.$$

Ряды аналитических функций

12. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{i\pi n/2}}{n}\, z^n$. Исследуйте сходимость ряда на границе круга сходимости.
13. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1}, \quad 0 < \varphi < \pi.$
14. Разложите функцию $\sqrt{i-z}$ в степенной ряд с центром в точке $z_0 = 0$. Найдите радиус сходимости полученного ряда. Ветвь корня выбирается условием $\sqrt{i} = -(1+i)/\sqrt{2}$.
15. Разложите функцию $\operatorname{sh}(4z - z^2)$ в ряд по степеням $z - 2$ и найдите радиус сходимости полученного ряда.
16. Найдите максимум модуля функции $\sin z$ на единичном круге $|z| \leqslant 1$.
17. Функцию $(z^2+1)^{-2}$ разложите в ряд Лорана в окрестности точек $z_1 = i$ и $z_2 = \infty$. Определите области, в которых разложения имеют место.
18. Найдите особые точки функций: а) $\dfrac{z}{(3-\cos z)\sin^2 z}$, б) $\dfrac{\operatorname{ch} z - 1}{e^z - 1}$. Выясните, допускают ли функции разложение в ряд Лорана в окрестностях найденных точек, и исследуйте характер изолированных особых точек.

Задание 3 (*сдать до 10 декабря*)

Элементы теории вычетов

19. Для каждой из указанных ниже функций найдите её вычеты относительно всех её изолированных особых точек:

а) $\dfrac{e^{1/z}}{(2+z)^2}$; б) $\dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{z}$; в) $\sin\frac{z}{z+1}$; г) $\dfrac{1}{1-\sqrt{2-z}}$.
Для последней функции рассмотрите обе её ветви.

20. Вычислите интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{z^2\,dz}{z^4-1}$, где C — окружность $(x-1)^2+(y-1)^2=2$, пробегаемая против часовой стрелки;

б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z\,dz}{e^{z^2}-1}$; в) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} z\cos\frac{z}{z+1}\,dz$; г) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^6(z+2)}$.

21. Вычислите интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}$ $(a>b>0)$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3\,dx}{x^6+1}$; в) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin x\,dx}{(1+x^2)^2}$;

г) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{x}(x^3+1)}$; д) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x\,dx}{x^2+a^2}$ $(a>0)$; е) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x\,dx}{x^2+a^2}$ $(a>0)$.

22. Найдите главные значения указанных интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{(x^2+4)(x-1)}$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4-1}$.

23. Используя теорему Руше найдите количество корней уравнений:
а) $z^4+8z-10=0$ в кольце $1<|z|<3$;
б) $e^z-5z^n+1=0$ в круге $|z|<2$, где $n\in\mathbb{N}$.

Преобразование Лапласа

24. Найдите изображения следующих оригиналов: а) $f(t)=t^2e^t\sin t$;
б) $f(t)=\dfrac{\cos t-1}{t}$; в) $\operatorname{si}(t) = -\displaystyle\int\limits_t^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$.

25. Найдите оригиналы следующих изображений:

а) $F(p)=\dfrac{p^3}{(p^2-4)(p^2+1)}$; б) $F(p)=\operatorname{arcctg}(p+1)$.

26. Используя формулу обращения для преобразования Лапласа, вычислите интеграл $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{\lambda z}}{z^3(z^2+1)}\,dz$, где $\alpha\in\mathbb{R}$. Для каких значений α это возможно?

27. Используя преобразование Лапласа, решите:
а) дифференциальное уравнение $y^{(4)} + y^{(3)} = e^t$ с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = y'''(0) = 0$;
б) систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u' - 2u - 4v = \cos t, \\ v' + u + 2v = \sin t, \end{cases}$$

с начальными условиями $u(0) = v(0) = 0$;
в) интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$x(t) = 4e^t + 3t - 4 - \int\limits_0^t (t-s)x(s)\,ds, \quad t > 0.$$

Задание 4 (*сдать до 30 декабря*)

Асимптотические методы

28. Покажите, что последовательности функций
а) $\varphi_n(z) = z^{-n}$; б) $\psi_n(z) = (z-1)z^{-2n}$; в) $\chi_n(z) = (z^2 - z + 1)z^{-3n}$
являются асимптотическими при $z \to \infty$, а функция $f(z) = (1+z)^{-1}$ допускает асимптотическое разложение по каждой из этих последовательностей.
29. Найдите асимптотические разложения интегралов:

$$\text{а)} \int\limits_0^x e^{it^2} dt \quad \text{при } x \to +0; \qquad \text{б)} \int\limits_x^{+\infty} e^{it^2} dt \quad \text{при } x \to +\infty.$$

30. Найдите при $p \to +\infty$ асимптотическое разложение интеграла Лапласа $F(p) = \int\limits_0^\infty \dfrac{\cos t - 1}{t} e^{-pt}\,dt$,
а) используя лемму Ватсона;
б) разложив изображение в ряд Тейлора по параметру p.
31. Найдите при $\lambda \to +\infty$ главный член асимптотики интеграла

$$F(\lambda) = \int\limits_0^1 x^\lambda \cos^n \pi x\,dx.$$

32. Найдите при $n \to +\infty$ главный член асимптотики интеграла

$$F(n) = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt.$$

33. Применив результаты предыдущей задачи для $F(2n)$, получите известную формулу Валлиса $\pi = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2$.

34. Найдите при $\lambda \to +\infty$ главный член асимптотики интеграла

$$F(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{i\lambda x^2} \, dx}{1+x^2}.$$

35. Найдите при $\lambda \to +\infty$ главный член асимптотики интеграла

$$F(\lambda) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

36. Используя метод перевала, найдите при $\lambda \to +\infty$ главный член асимптотики интеграла

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda\left(-\frac{t^2}{2}+it\right)} \, dt.$$

Программу и задания по ТФКП составила
к.ф.-м.н. С.Г. Бугаева

Спецкурс
«Дополнительные главы алгебры»

Лектор — Александр Петрович Ульянов

3-й семестр

Оглавление

Основные структуры алгебры

Абстракция свойств множества преобразований в понятие группы. Действие группы на множестве. Простейшие примеры групп: циклические группы, группы перестановок, различные группы движений плоскости. Классические группы матриц. Обобщённые ортогональные группы. Группа Лоренца.

Морфизмы групп, ядро и образ морфизма, изоморфизмы, примеры. Орбиты и стабилизаторы при действии группы. Действие группы линейными операторами (линейное представление). Действия группы на себе сдвигами и сопряжениями.

Понятия кольца и поля. Простейшие примеры. Кольцо многочленов от одной буквы над произвольным полем. Поле частных. Кольцо квадратных матриц. Примеры числовых колец и полей. Кольца вычетов. Примеры конечных полей. Характеристика поля. Морфизмы колец.

Понятие алгебры над полем. Алгебра многочленов. Алгебра матриц. Алгебра линейных операторов.

Строение группы $\mathbf{SU}_2$. Матричное представление алгебры кватернионов. Сопряжение, норма, обращение кватерниона. Чисто мнимые кватернионы, связь их умножения со скалярным и векторным произведениями в $\mathbb{R}^3$. Кватернионы и вращения трёхмерного пространства. Морфизм групп $\pi\colon \mathbf{SU}_2 \to \mathbf{SO}_3$.

Классические матричные алгебры Ли. Изоморфизм алгебр $\mathfrak{su}_2$ и $\mathfrak{so}_3$.

Полилинейные и кососимметричные функции строк матрицы. Внешние формы. Алгебра Грассмана пространства $\mathbb{R}^3$.

Тензорные обозначения. Простейшие типы тензоров: скаляры, векторы, ковекторы, билинейные формы, операторы. Ковариантность и контравариантность. Общее определение тензора. Умножение тензоров, свёртка, подъём и спуск индексов. Пространства тензоров, тензорное произведение пространств. Симметрия тензоров.

Линейные пространства над полем и модули над кольцом.

Понятие категории. Категории множеств, групп, колец, линейных пространств, модулей. Категория чумов (частично упорядоченных множеств). Категории топологических пространств, многообразий.

Группы отражений и введение в теорию Ли

Системы корней, группы Кокстера. Матрица Картана, диаграмма Кокстера. Классификация неприводимых систем корней. Кристаллографические системы корней. Простые конечномерные алгебры Ли.

Алгебры Ли малых размерностей. Алгебра Гейзенберга. Нильпотентные и разрешимые алгебры Ли. Полупростые алгебры Ли. Разложение Леви.

Группы Ли. Алгебра Ли группы Ли. Экспоненциальное отображение. Связь представлений группы Ли и представлений её алгебры Ли. Группа Гейзенберга, её представления. Приложение: эквивалентность волновой механики Шрёдингера и матричной механики Гейзенберга.

Введение в теорию представлений

Операции с представлениями группы: прямая сумма, взятие двойственного, тензорное произведение, симметрические и внешние степени. Неприводимость и вполне приводимость. Разложение представлений на неприводимые слагаемые. Групповая алгебра.

Эквивалентность представлений. Свойства характеров конечных групп, ортогональность характеров. Таблицы характеров небольших групп. Кольцо характеров.

Разбиения целого числа. Диаграммы и стандартные таблицы Юнга. Симметризаторы Юнга, построение всех неприводимых представлений группы перестановок. Формула Фробениуса для характеров, размерности неприводимых представлений.

Неприводимые представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$. Разложение тензорного произведения представлений на неприводимые. Приложение: правила отбора для электронов в атоме.

Неприводимые представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3$. Решётка весов, старший вес представления. Разложение тензорного произведения представлений на неприводимые. Приложение: симметрии адронов и открытие кварковой модели их строения.

Модули Вейля, построение неприводимых представлений полной линейной группы.

Группы в топологии, геометрии, алгебре

Группа кос Артина (точнее, Гаусса — Артина).

Дробно-линейные преобразования сферы Римана, группа Мёбиуса $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ и действие преобразований Лоренца на небесной сфере. Изометрии гиперболической плоскости и группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Модулярная группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Фуксовы группы.

Алгебраические уравнения, расширения полей и классическая теория Галуа.

Проективная геометрия. Идеи «Эрлангенской программы» Клейна: теория групп как фундаментальное средство организации геометрических знаний.

Программу спецкурса
«Дополнительные главы алгебры»
составил Ph.D. А. П. Ульянов

Спецкурс
«Дифференциальная геометрия»

Лектор — Аксинья Борисовна Воробьёва

4-й семестр

`Из дома реальности легко забрести в лес математики,`
`но лишь немногие способны вернуться обратно.`
`Хуго Штейнхаус`

1. Теория поверхностей

1. Первая квадратичная форма и вычисляемые через нее объекты.

2. Теория кривизны и вторая квадратичная форма.

3. Понятие гладкого многообразия. Многообразие с краем, ориентация на многообразии. Примеры: $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{RP}^n$, $\mathbb{CP}^n$, классические матричные группы. Понятие группы Ли. Метрика на многообразии. Уравнения Эйлера — Лагранжа. Примеры уравнений движения. Геодезические как экстремали функционала длины.

4. Приложения: (4.1). Геометрия Лобачевского: модель на гиперболоиде и модель Клейна, группа изометрий, простейшие вычисления. Трёхмерное пространство Лобачевского. Связь со специальной теорией относительности. (4.2). Комплексный анализ в теории поверхностей: минимальные поверхности. Примеры, конформная параметризация, представление Вейерштрасса. Задача Плато. (4.3). Формула Гаусса — Бонне. Следствия из неё.

2. Тензорный анализ

5. Симметрические и кососимметрические тензоры, поднятие и опускание индексов, оператор двойственности Ходжа. Пример из механики: тензоры деформации и напряжения. Фермионы и бозоны: пространства симметрических и кососимметрических тензоров как фоковские пространства. Электромагнитное поле как кососимметрический тензор ранга 2 в $\mathbb{R}^{1,3}$. Тензор энергии — импульса электромагнитного поля.

6. Дифференциальные формы. Внешнее произведение, внешнее дифференцирование. Уравнения Максвелла. Интегрирование дифференциальных форм. Общая формула Стокса и следствия из неё. Приложения в физике: формулы для потока и циркуляции электрического и магнитного полей.

7. Ковариантное дифференцирование векторных полей. Геодезические как аналог прямых в пространствах со связностью. Геодезический поток. Параллельный перенос вдоль кривых.

8. Тензор кривизны Римана. Тензор Римана многообразий в двумерном и трёхмерном случае, тензор Риччи, скалярная и секционная кривизна.

9. Применения в общей теории относительности. Гравитационное поле как индефинитная метрика в многообразии пространства — времени $\mathbb{M}^4$. Уравнения Эйнштейна для гравитационного поля в пустом пространстве. Частные решения уравнений Эйнштейна: метрика Шварцшильда (метрика стационарной чёрной дыры), метрика Керра (метрика равномерно вращающейся чёрной дыры). Отклонение света гравитационным полем, смещение перигелия Меркурия. Взаимодействие материи с гравитационным полем.

3. Элементы дифференциальной топологии и гомотопической алгебры

10. Действие группы на многообразии. Дискретное действие, факторпространства. Транзитивное действие, однородные пространства. Примеры: евклидовы, сферические и гиперболические многообразия.

11. Векторные поля на гладком многообразии. Однопараметрическая группа диффеоморфизмов. Пример: алгебра Ли левоинвариантных векторных полей группы Ли. Теорема Хопфа — Пуанкаре об индексе векторного поля.

12. Понятие гладкого расслоения, структурная группа. Накрытие как частный случай расслоения. Примеры: тривиальное расслоение, лист Мёбиуса, расслоение Хопфа, векторные расслоения. Связность в расслоении.

13. Восемь трёхмерных модельных геометрий. Теорема Тёрстона. Геометризационная гипотеза.

Литература

1. *Новиков С.П., Тайманов И.А.* Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005.
2. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: методы и приложения. М.: Наука, 1979.
3. *Тёрстон У.* Трёхмерная геометрия и топология. Т. 1. М.: МЦНМО, 2001.
4. *Фоменко А.Т., Фукс Д.Б.* Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.

Программу спецкурса
«Дифференциальная геометрия»
составила А. Б. Воробьёва

Спецкурс «Дополнительные главы дифференциальных уравнений»

*Лекторы — Светлана Геннадьевна Бугаева,
Александр Анатольевич Егоров,
Сергей Андреевич Тресков*

4-й семестр

В различных естетственных науках (физике, механике и др.) активно используются результаты и методы теории дифференциальных уравнений. К сожалению, в силу ограниченности учебного времени в рамках стандартного курса дифференциальных уравнений, читаемого на физическом факультете НГУ, некоторые важные разделы дифференциальных уравнений, применяемые в физике и механике, не удаётся изложить в достаточном объёме.

Основной целью спецкурса является знакомство слушателей с некоторыми темами и приложениями к физике и механике следующих разделов теории дифференциальных уравнений: аналитической теории дифференциальных уравнений, вариационного исчисления, теории бифуркаций фазовых портретов.

1. Аналитическая теория дифференциальных уравнений

Ещё Коши показал, что при весьма широких предположениях относительно характера дифференциального уравнения его решения представляют собой аналитические функции комплексного переменного. Поэтому решения таких уравнений можно изучать обычными методами теории функций комплексного переменного. С этой точки зрения и ведётся исследование решений дифференциальных уравнений в аналитической теории дифференциальных уравнений.

1.1. Существование аналитического решения задачи Коши для нелинейных аналитических систем и уравнений n-го порядка. Теорема локальной единственности.

1.2. Линейная система с аналитическими коэффициентами, существование глобального решения в односвязной области. Теорема существования и единственности решения задачи Коши в односвязной области. Изоморфизм пространства решений однородной системы пространству $\mathbb{C}^n$.

1.3. Линейное уравнение n-го порядка с аналитическими коэффициентами, сведение к системе, решение с помощью степенных рядов.

1.4. Уравнения с регулярной особой точкой; разложение решения в обобщенно степенной ряд. Логарифмические решения.

1.5. Уравнения класса Фукса. Уравнение Гаусса, гипергеометрический ряд. Применение к классическим ортогональным многочленам (многочлены Лежандра и Якоби) и к уравнению Бесселя (функции Бесселя первого и второго рода).

1.6. Применение теории аналитических функций и функций Бесселя к исследованию плоского установившегося течения жидкости, плоской электростатической задачи, плоского волнового уравнения, пространственного волнового уравнения в цилиндрических и сферических координатах.

2. Вариационное исчисление: канонический вид уравнений Эйлера и достаточные условия экстремума

В развитии вариационного исчисления важную роль сыграли многие механические и физические задачи, например задача о брахистохроне. В свою очередь методы вариационного исчисления широко используются в различных вопросах физики. Применения вариационного исчисления в физике не исчерпывается решением отдельных весьма важных задач. Так называемые «вариационные принципы» представляют собой, по существу, выражение весьма общих физических закономерностей, имеющих место в самых различных областях физики, начиная от классической механики и кончая теорией элементарных частиц.

2.1. Вариационная задача с несколькими неизвестными функциями. Система уравнений Эйлера. Канонические переменные. Каноническая система уравнений Эйлера. Преобразование Лежандра. Канонические преобразования.

2.2. Принцип наименьшего действия. Законы сохранения.

2.3. Уравнения Гамильтона — Якоби. Теорема Якоби.

2.4. Сильные и слабые локальные экстремумы. Вторая вариация функционала. Условие Лежандра.

2.5. Сопряженные точки. Необходимое условие Якоби. Достаточные условия слабого экстремума.

2.6. Согласованные граничные точки. Общее определение поля. Поле функционала.

2.7. Инвариантный интеграл Гильберта. Функция Вейерштрасса. Достаточные условия сильного экстремума.

3. Динамические системы. Теория бифуркаций

Динамические системы являются удобным математическим аппаратом для описания физических, механических, биологических и других систем с конечным числом степеней свободы. Слово «бифуркация» означает «раздвоение» и употребляется как название любого скачкообразного изменения, происходящего при плавном изменении параметров в динамической системе. Будут изложены начальные сведения о бифуркациях фазовых портретов динамических систем.

3.1. Динамические системы и дифференциальные уравнения. Грубые системы. Бифуркации.

3.2. Динамические системы на прямой.

3.3.0. Динамические системы на плоскости.

3.3.1. Локальные бифуркации коразмерности 1.

3.3.2. Локальные бифуркации коразмерности 2.

3.3.3. Нелокальные бифуркации.

Литература

1. *Аносов Д. В.* Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем. М.: МЦНМО, 2008.

2. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

3. *Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П.* Динамические системы — 5: Теория бифуркаций // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 5.

4. *Босс В.* Лекции по математике: Дифференциальные уравнения. М.: УРСС, 2004. Т. 2.

Программу спецкурса
«Дополнительные главы
дифференциальных уравнений»
составили к.ф.-м.н. С. Г. Бугаева,
доценты А. А. Егоров и С. А. Тресков

Спецкурс
«Дополнительные главы теории функций комплексного переменного»

Лектор — Александр Сергеевич Романов

4-й семестр

В различных разделах физики и техники широкое распространение получили методы, основанные на использовании результатов теории функций комплексного переменного. К сожалению, в силу ограниченности учебного времени в рамках стандартного курса теории функций, читаемого на физическом факультете НГУ, реально удается познакомить слушателей лишь с приложением теории вычетов к вычислению некоторых типов определенных интегралов.

Основной целью спецкурса является знакомство слушателей с достаточно широким кругом математических и физических задач, при решении которых существенным образом используются методы теории функций комплексного переменного.

1. Некоторые вопросы теории вычетов

Вычисление интегралов является важной задачей, возникающей в различных разделах естествознания. При этом применение теории вычетов основано на построении для каждого типа интегралов специальных контуров интегрирования. В дополнение к изучавшимся в основном курсе будут рассмотрены другие типы интегралов, в том числе интегралы, связанные с преобразованием Лапласа. Помимо этого теория вычетов содержит ряд утверждений о свойствах аналитических функций, которые имеют различные приложения.

1.1. Вычисление интегралов типа бета-функции.

1.2. Вычисление интегралов с логарифмическим весом.

1.3. Вычисление главного значения расходящихся несобственных интегралов.

1.4. Интегралы, связанные с формулой обращения преобразования Лапласа. Теоремы разложения.

1.5. Обращение степенных рядов. Формулы Бурмана — Лагранжа. Разложение в ряд решений трансцендентных уравнений.

1.6. Разложение мероморфной функции на элементарные дроби.

2. Конформные отображения

Конформные отображения относятся к числу важнейших понятий математики и имеют обширные приложения в теории потенциала, при решении краевых задач уравнений математической физики, в гидродинамике, в электростатике и т. д. Как правило, решения различных задач удается найти для некоторых канонических областей, а знание конформного отображения области $D \subset C$ на каноническую позволяет получить решение и в области D.

2.1. Общие свойства конформных отображений. Теорема Римана. Плоскопараллельные векторные поля. Комплексный потенциал. Примеры плоских полей: *источник, вихрь, вихреисточник, диполь, простой слой, двойной слой.*

2.2. Дробно-линейные отображения:

а) верхней полуплоскости на единичный круг;

б) круга на круг;

в) полуплоскости на полуплоскость.

2.3. Отображения, осуществляемые элементарными функциями:

а) полосы на единичный круг;

б) полуплоскости с разрезом на полуплоскость, обтекание препятствия плоским потоком с заданной скоростью на бесконечности;

в) круга с разрезом на единичный круг;

г) плоскости с двумя разрезами на полосу;

д) эксцентрического кругового кольца на концентрическое.

2.4. Отображения круговых луночек:

а) круговой луночки на полуплоскость;

б) круговой луночки на полосу;

в) внешности дуги на внешность круга, обтекание профилей Жуковского.

2.5. Интеграл Кристофеля — Шварца. Отображения многоугольников:

а) полуплоскости на прямоугольник;

б) полосы на плоскость с двумя разрезами;

в) многоугольника с вершинами на бесконечности на полосу;

г) круга на звезду.

3. Метод перевала

В основе метода перевала лежит тот факт, что интеграл от аналитической функции не зависит от выбора контура, соединяющего две фиксированные точки. Это позволяет перейти от исходного интеграла к интегралу по специальному *перевальному* контуру, наиболее приспособленному для получения асимптотических оценок. При этом как раз нахождение перевального контура и представляет основную сложность.

3.1. Топологическая часть метода перевала — основные принципы нахождения перевального контура.

3.2. Аналитическая часть метода перевала — вычисление асимптотики интеграла по перевальному контуру.

3.3. Асимптотика функции Эйри.

3.4. Асимптотика коэффициентов рядов Тейлора и Лорана аналитических функций.

3.5. Асимптотика преобразования Лапласа.

4. Специальные функции

Специальными функциями называют часто встречающиеся в различных задачах математической физики функции, которые, как правило, не выражаются через *элементарные функции* и определяются при помощи специального вида интегралов или рядов. Основные классы специальных функций являются решениями специальных дифференциальных уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами.

4.1. Цилиндрические функции: различные представления, производящая функция, асимптотика, ортогональность, ряды Фурье — Бесселя.

4.2. Примеры применения цилиндрических функций при решении задач математической физики.

4.3. Эллиптические интегралы.

4.4. Конформное отображение полуплоскости на данный прямоугольник.

4.5. Электростатическое поле двух прямоугольных полюсов.

Программу спецкурса
«Дополнительные главы
теории функций комплексного переменного»
составил д.ф.-м.н. А. С. Романов