

І. Аналитическая теория дифференциальных уравнений

Вопросы и задачи к экзамену

Вводная часть. Определения: 1) шара в \mathbb{C}^n (круга в \mathbb{C}), 2) полукруга (полицлиндра) в \mathbb{C}^n , 3) дифференцируемой в смысле комплексного анализа функции в точке $z \in \mathbb{C}^n$, 4) аналитической в области $D \subset \mathbb{C}^n$ функции. Теорема Хартогса. Свойства аналитических функций в \mathbb{C}^n .

Часть І. Обыкновенное дифференциальное уравнение 1-ого порядка с аналитической правой частью. Понятие решения, задачи Коши (ЗК). Теоремы существования решения ЗК (локальные) для обыкновенного уравнения, системы дифференциальных уравнений, уравнения n -ого порядка. Определение компоненты связности. Теоремы единственности решения ЗК. Теоремы существования решения ЗК (глобальная) для линейных аналитических систем, для линейного уравнения n -ого порядка. Теоремы существования и единственности для линейных аналитических систем.

Задачи к части І. Выясните, имеют ли следующие ЗК решения в виде степенных рядов. Если имеют, то найдите несколько первых членов ряда и укажите (или оцените) радиус сходимости этого ряда.

1. $y' = y^2 - x, y(0) = 1.$
2. $y' = x + 1/y, y(0) = 1.$
3. $y' = y + xe^y, y(0) = 0.$
4. $y' = 2x + \cos y, y(0) = 0.$
5. $y' = x^2 + y^3, y(1) = 1.$
6. $y'' = xy' - y^2, y(0) = 1, y'(0) = 2.$
7. $y'' = (y')^2 + xy, y(0) = 4, y'(0) = -2.$
8. $(1 - x^2)y'' - xy' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$
9. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 0.$
10. $(1 - x^2)y'' - 5xy' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$
11. $xy'' + y' + xy = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0.$
12. $y'' - x^2y = 3x^2 - x^4, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Часть ІІ. Определения: 1) дифференциального уравнения Фукса (УФ), 2) обобщенно-степенного ряда (ОСР), правого и левого решений УФ. Теорема о существовании правого решения УФ в виде ОСР. Теорема о существовании левого решения УФ в виде ОСР. Лемма о линейной независимости функций, представляемых в виде сумм ОСР с разными показателями степеней λ . Теоремы о существовании решения УФ, линейно независимого с правым решением. Определение: 1) уравнения Бесселя (УБ), 2) функции Бесселя (ФБ) порядка ν , 1-ого и 2-ого рода при разных значениях параметра ν .

Задачи к части ІІ. 1. Уравнение вида $xy'' + (1 + \alpha - x)y' + ny = 0, n \in \mathbb{N}, \alpha > -1$, должно быть Вам знакомо. Покажите, что оно является частным случаем дифференциального уравнения Фукса. Следовательно, у него имеется хотя бы одно решение в виде ОСР. Найдите его. Укажите область его сходимости. Исследуйте, при каких значениях параметра α уравнение имеет второе линейно независимое решение в виде ОСР, а при каких — логарифмическое решение. Найдите эти решения при значениях $n = 0, 1, 2$.

2. Сделав подходящую замену переменной в уравнении $((1 - x^2)y')' + n(n + 1)y = 0, n \in \mathbb{N}$, сведите его к уравнению Фукса. При этом у получившегося уравнения имеется хотя бы одно решение в виде ОСР. Найдите его. Укажите область его сходимости. Покажите, что второе линейно независимое решение будет логарифмическим и найдите его при значениях $n = 0, 1, 2$.

3. В задачнике [Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. § 11, п.4] описано уравнение Эйлера и приводится способ нахождения его общего решения. Убедившись, что однородное уравнение Эйлера является частным случаем уравнения Фукса, укажите еще один способ нахождения общего решения уравнения Эйлера с точки зрения аналитической теории.

Выразите через функции Бесселя общие решения следующих уравнений, сведя их к УБ подходящей заменой переменной.

4. $x^2y'' + xy' + (4x^2 - \frac{9}{25})y = 0.$
5. $x^2y'' + xy' + (3x^2 - 4)y = 0.$
6. $x^2y'' + xy' + (4x^2 - \frac{1}{9})y = 0.$

Комментарии. Теоретическая часть отдельно в билетах представлена не будет. Знание перечисленных фактов потребуется при защите задач из билета. Билет будет состоять из двух задач (первая задача из части І, вторая — из части ІІ). Первую задачу (одна из задач 1–12 части І) нужно будет решить НА ЭКЗАМЕНЕ. Задачи 1–6 части ІІ необходимо решить ДОМА, принести их на экзамен и защитить ту, которая окажется в билете. Билет выбирается случайным образом. На подготовку 1 час, можно пользоваться записями и литературой. Оценка за ответ на билет = количество решенных задач +3 балла. Предварительный срок экзамена 20 мая, четверг 17–45, ауд. 416.

Оценка за спецкурс = среднее арифметическое оценок от каждого лектора.

С. Г. Бугаева