

Дополнительные главы алгебры, осень 2009

ЛЕКТОР — АЛЕКСАНДР ПЕТРОВИЧ УЛЬЯНОВ

Группы отражений и введение в теорию Ли

Системы корней, группы Кокстера. Матрица Картана, диаграмма Кокстера. Классификация неприводимых систем корней. Кристаллографические системы корней. Простые конечномерные алгебры Ли.

Алгебры Ли малых размерностей. Алгебра Гейзенберга. Нильпотентные и разрешимые алгебры Ли. Полу-простые алгебры Ли. Разложение Леви.

Группы Ли. Алгебра Ли группы Ли. Экспоненциальное отображение. Связь представлений группы Ли и представлений её алгебры Ли. Группа Гейзенберга, её представления. Приложение: эквивалентность волновой механики Шрёдингера и матричной механики Гейзенберга.

Введение в теорию представлений конечных групп

Операции с представлениями группы: прямая сумма, взятие двойственного, тензорное произведение, симметрические и внешние степени. Неприводимость и вполне приводимость. Разложение представлений на неприводимые слагаемые. Групповая алгебра.

Эквивалентность представлений. Свойства характеров конечных групп, ортогональность характеров. Таблицы характеров небольших групп. Кольцо характеров.

Разбиения целого числа. Диаграммы и стандартные таблицы Юнга. Симметризаторы Юнга, построение всех неприводимых представлений группы перестановок. Формула Фробениуса для характеров, размерности неприводимых представлений.

Введение в теорию представлений простых алгебр Ли

Неприводимые представления алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 . Разложение тензорного произведения представлений на неприводимые. Приложение: правила отбора для электронов в атоме.

Неприводимые представления алгебры Ли \mathfrak{sl}_3 . Решётка весов, старший вес представления. Разложение тензорного произведения представлений на неприводимые. Приложение: симметрии адронов и открытие кварковой модели их строения.

Модули Вейля, построение неприводимых представлений полной линейной группы.

Группы в топологии, геометрии, алгебре

Группа кос Артина (точнее, Гаусса — Артина).

Дробно-линейные преобразования сферы Римана, группа Мёбиуса $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ и действие преобразований Лоренца на небесной сфере. Изометрии гиперболической плоскости и группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Модулярная группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Фуксовы группы.

Алгебраические уравнения, расширения полей и классическая теория Галуа.

Проективная геометрия. Идеи «Эрлангенской программы» Клейна: теория групп как фундаментальное средство организации геометрических знаний.

Основные структуры алгебры — добавления

Алгебры Клиффорда (?).

Понятие категории. Категории множеств, групп, колец, линейных пространств, модулей. Категория чумов (частично упорядоченных множеств). Категории топологических пространств, многообразий.

Введение в алгебраическую геометрию

Полиномиальные функции как техническая основа, вместо гладких. Понятие идеала кольца. Нётеровы кольца. Теорема Гильберта о базисе. Аффинное пространство, алгебраические подмножества, топология Зарисского. Nullstellensatz (теорема Гильберта о нулях).

Полиномиальные функции, координатное кольцо. Соответствие между полиномиальными отображениями и морфизмами координатных колец (антиэквивалентность категории аффинных многообразий и категории конечнопорождённых алгебр).

Проективное пространство. Проективные многообразия.