

# Спецкурс «Дифференциальная геометрия»

Лектор — Аксинья Борисовна Воробьёва

4-й семестр

Из дома реальности легко забрести в лес математики,  
но лишь немногие способны вернуться обратно.  
Хуго Штейнхаус

## 1. Теория поверхностей

1. Первая квадратичная форма и вычисляемые через нее объекты.
2. Теория кривизны и вторая квадратичная форма.
3. Понятие гладкого многообразия. Многообразие с краем, ориентация на многообразии. Примеры:  $S^n$ ,  $\mathbb{R}P^n$ ,  $\mathbb{C}P^n$ , классические матричные группы. Понятие группы Ли. Метрика на многообразии. Уравнения Эйлера — Лагранжа. Примеры уравнений движения. Геодезические как экстремали функционала длины.
4. Приложения: (4.1). Геометрия Лобачевского: модель на гиперболоиде и модель Клейна, группа изометрий, простейшие вычисления. Трёхмерное пространство Лобачевского. Связь со специальной теорией относительности. (4.2). Комплексный анализ в теории поверхностей: минимальные поверхности. Примеры, конформная параметризация, представление Вейерштрасса. Задача Плато. (4.3). Формула Гаусса — Бонне. Следствия из неё.

## 2. Тензорный анализ

5. Симметрические и кососимметрические тензоры, поднятие и опускание индексов, оператор двойственности Ходжа. Пример из механики: тензоры деформации и напряжения. Фермионы и бозоны: пространства симметрических и кососимметрических тензоров как фоковские пространства. Электромагнитное поле как кососимметрический тензор ранга 2 в  $\mathbb{R}^{1,3}$ . Тензор энергии — импульса электромагнитного поля.
6. Дифференциальные формы. Внешнее произведение, внешнее дифференцирование. Уравнения Максвелла. Интегрирование дифференциальных форм. Общая формула Стокса и следствия из неё. Приложения в физике: формулы для потока и циркуляции электрического и магнитного полей.
7. Ковариантное дифференцирование векторных полей. Геодезические как аналог прямых в пространствах со связностью. Геодезический поток. Параллельный перенос вдоль кривых.

8. Тензор кривизны Римана. Тензор Римана многообразий в двумерном и трёхмерном случае, тензор Риччи, скалярная и секционная кривизна.

9. Применения в общей теории относительности. Гравитационное поле как индефинитная метрика в многообразии пространства — времени  $M^4$ . Уравнения Эйнштейна для гравитационного поля в пустом пространстве. Частные решения уравнений Эйнштейна: метрика Шварцшильда (метрика стационарной чёрной дыры), метрика Керра (метрика равномерно вращающейся чёрной дыры). Отклонение света гравитационным полем, смещение перигелия Меркурия. Взаимодействие материи с гравитационным полем.

### 3. Элементы дифференциальной топологии и гомотопической алгебры

10. Действие группы на многообразии. Дискретное действие, факторпространства. Транзитивное действие, однородные пространства. Примеры: евклидовы, сферические и гиперболические многообразия.

11. Векторные поля на гладком многообразии. Однопараметрическая группа диффеоморфизмов. Пример: алгебра Ли левоинвариантных векторных полей группы Ли. Теорема Хопфа — Пуанкаре об индексе векторного поля.

12. Понятие гладкого расслоения, структурная группа. Накрытие как частный случай расслоения. Примеры: тривиальное расслоение, лист Мёбиуса, расслоение Хопфа, векторные расслоения. Связность в расслоении.

13. Восемь трёхмерных модельных геометрий. Теорема Тёрстона. Геометризация гипотеза.

### Литература

1. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: методы и приложения. М.: Наука, 1979.
3. Тёрстон У. Трёхмерная геометрия и топология. Т. 1. М.: МЦНМО, 2001.
4. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.

Программу спецкурса  
«Дифференциальная геометрия»  
составила А. Б. Воробьева