Спецкурс «Дополнительные главы дифференциальных уравнений»

Лекторы — Светлана Геннадьевна Бугаева,
Александр Анатольевич Егоров,
Сергей Андреевич Тресков

4-й семестр

В различных естетственных науках (физике, механике и др.) активно используются результаты и методы теории дифференциальных уравнений. К сожалению, в силу ограниченности учебного времени в рамках стандартного курса дифференциальных уравнений, читаемого на физическом факультете НГУ, некоторые важные разделы дифференциальных уравнений, применяемые в физике и механике, не удаётся изложить в достаточном объёме.

Основной целью спецкурса является знакомство слушателей с некоторыми темами и приложениями к физике и механике следующих разделов теории дифференциальных уравнений: аналитической теории дифференциальных уравнений, вариационного исчисления, теории бифуркаций фазовых портретов.

1. Аналитическая теория дифференциальных уравнений

Ещё Коши показал, что при весьма широких предположениях относительно характера дифференциального уравнения его решения представляют собой аналитические функции комплексного переменного. Поэтому решения таких уравнений можно изучать обычными методами теории функций комплексного переменного. С этой точки зрения и ведётся исследование решений дифференциальных уравнений в аналитической теории дифференциальных уравнений.

1.1. Существование аналитического решения задачи Коши для нелинейных аналитических систем и уравнений n-го порядка. Теорема локальной единственности.

1.2. Линейная система с аналитическими коэффициентами, существование глобального решения в односвязной области. Теорема существования и единственности решения задачи Коши в односвязной области. Изоморфизм пространства решений однородной системы пространству $\mathbb{C}^n$.

1.3. Линейное уравнение n-го порядка с аналитическими коэффициентами, сведение к системе, решение с помощью степенных рядов.

1.4. Уравнения с регулярной особой точкой; разложение решения в обобщенно степенной ряд. Логарифмические решения.

1.5. Уравнения класса Фукса. Уравнение Гаусса, гипергеометрический ряд. Применение к классическим ортогональным многочленам (многочлены Лежандра и Якоби) и к уравнению Бесселя (функции Бесселя первого и второго рода).

1.6. Применение теории аналитических функций и функций Бесселя к исследованию плоского установившегося течения жидкости, плоской электростатической задачи, плоского волнового уравнения, пространственного волнового уравнения в цилиндрических и сферических координатах.

2. Вариационное исчисление: канонический вид уравнений Эйлера и достаточные условия экстремума

В развитии вариационного исчисления важную роль сыграли многие механические и физические задачи, например задача о брахистохроне. В свою очередь методы вариационного исчисления широко используются в различных вопросах физики. Применения вариационного исчисления в физике не исчерпывается решением отдельных весьма важных задач. Так называемые «вариационные принципы» представляют собой, по существу, выражение весьма общих физических закономерностей, имеющих место в самых различных областях физики, начиная от классической механики и кончая теорией элементарных частиц.

2.1. Вариационная задача с несколькими неизвестными функциями. Система уравнений Эйлера. Канонические переменные. Каноническая система уравнений Эйлера. Преобразование Лежандра. Канонические преобразования.

2.2. Принцип наименьшего действия. Законы сохранения.

2.3. Уравнения Гамильтона — Якоби. Теорема Якоби.

2.4. Сильные и слабые локальные экстремумы. Вторая вариация функционала. Условие Лежандра.

2.5. Сопряженные точки. Необходимое условие Якоби. Достаточные условия слабого экстремума.

2.6. Согласованные граничные точки. Общее определение поля. Поле функционала.

2.7. Инвариантный интеграл Гильберта. Функция Вейерштрасса. Достаточные условия сильного экстремума.

3. Элементы теории динамических систем и теории бифуркаций

Динамические системы являются удобным математическим аппаратом для описания физических, механических, биологических и других систем с конечным числом степеней свободы. Слово «бифуркация» означает «раздвоение» и употребляется как название любого скачкообразного изменения, происходящего при плавном изменении параметров в динамической системе. Будут изложены начальные сведения о бифуркациях фазовых портретов динамических систем.

3.1. Динамические системы и дифференциальные уравнения. Грубые системы. Бифуркации.

3.2. Динамические системы на прямой.

3.3. Динамические системы на плоскости.

3.3.1. Локальные бифуркации коразмерности 1.

3.3.2. Локальные бифуркации коразмерности 2.

3.3.3. Нелокальные бифуркации.

Литература

1. *Аносов Д. В.* Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем. М.: МЦНМО, 2008.

2. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

3. *Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П.* Динамические системы — 5: Теория бифуркаций // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 5.

4. *Босс В.* Лекции по математике: Дифференциальные уравнения. М.: УРСС, 2004. Т. 2.

Программу спецкурса
«Дополнительные главы
дифференциальных уравнений»
составили к.ф.-м.н. С. Г. Бугаева,
доценты А. А. Егоров и С. А. Тресков