Спецкурс
«Дополнительные главы теории функций комплексного переменного»

Лектор — Александр Сергеевич Романов

4-й семестр

В различных разделах физики и техники широкое распространение получили методы, основанные на использовании результатов теории функций комплексного переменного. К сожалению, в силу ограниченности учебного времени в рамках стандартного курса теории функций, читаемого на физическом факультете НГУ, реально удается познакомить слушателей лишь с приложением теории вычетов к вычислению некоторых типов определенных интегралов.

Основной целью спецкурса является знакомство слушателей с достаточно широким кругом математических и физических задач, при решении которых существенным образом используются методы теории функций комплексного переменного.

1. Некоторые вопросы теории вычетов

Вычисление интегралов является важной задачей, возникающей в различных разделах естествознания. При этом применение теории вычетов основано на построении для каждого типа интегралов специальных контуров интегрирования. В дополнение к изучавшимся в основном курсе будут рассмотрены другие типы интегралов, в том числе интегралы, связанные с преобразованием Лапласа. Помимо этого теория вычетов содержит ряд утверждений о свойствах аналитических функций, которые имеют различные приложения.

1.1. Вычисление интегралов типа бета-функции.

1.2. Вычисление интегралов с логарифмическим весом.

1.3. Вычисление главного значения расходящихся несобственных интегралов.

1.4. Интегралы, связанные с формулой обращения преобразования Лапласа. Теоремы разложения.

1.5. Обращение степенных рядов. Формулы Бурмана — Лагранжа. Разложение в ряд решений трансцендентных уравнений.

1.6. Разложение мероморфной функции на элементарные дроби.

2. Конформные отображения

Конформные отображения относятся к числу важнейших понятий математики и имеют обширные приложения в теории потенциала, при решении краевых задач уравнений математической физики, в гидродинамике, в электростатике и т. д. Как правило, решения различных задач удается найти для некоторых канонических областей, а знание конформного отображения области $D \subset C$ на каноническую позволяет получить решение и в области D.

2.1. Общие свойства конформных отображений. Теорема Римана. Плоскопараллельные векторные поля. Комплексный потенциал. Примеры плоских полей: *источник, вихрь, вихреисточник, диполь, простой слой, двойной слой.*

2.2. Дробно-линейные отображения:

а) верхней полуплоскости на единичный круг;

б) круга на круг;

в) полуплоскости на полуплоскость.

2.3. Отображения, осуществляемые элементарными функциями:

а) полосы на единичный круг;

б) полуплоскости с разрезом на полуплоскость, обтекание препятствия плоским потоком с заданной скоростью на бесконечности;

в) круга с разрезом на единичный круг;

г) плоскости с двумя разрезами на полосу;

д) эксцентрического кругового кольца на концентрическое.

2.4. Отображения круговых луночек:

а) круговой луночки на полуплоскость;

б) круговой луночки на полосу;

в) внешности дуги на внешность круга, обтекание профилей Жуковского.

2.5. Интеграл Кристофеля — Шварца. Отображения многоугольников:

а) полуплоскости на прямоугольник;

б) полосы на плоскость с двумя разрезами;

в) многоугольника с вершинами на бесконечности на полосу;

г) круга на звезду.

3. Метод перевала

В основе метода перевала лежит тот факт, что интеграл от аналитической функции не зависит от выбора контура, соединяющего две фиксированные точки. Это позволяет перейти от исходного интеграла к интегралу по специальному *перевальному* контуру, наиболее приспособленному для получения асимптотических оценок. При этом как раз нахождение перевального контура и представляет основную сложность.

3.1. Топологическая часть метода перевала — основные принципы нахождения перевального контура.

3.2. Аналитическая часть метода перевала — вычисление асимптотики интеграла по перевальному контуру.

3.3. Асимптотика функции Эйри.

3.4. Асимптотика коэффициентов рядов Тейлора и Лорана аналитических функций.

3.5. Асимптотика преобразования Лапласа.

4. Специальные функции

Специальными функциями называют часто встречающиеся в различных задачах математической физики функции, которые, как правило, не выражаются через *элементарные функции* и определяются при помощи специального вида интегралов или рядов. Основные классы специальных функций являются решениями специальных дифференциальных уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами.

4.1. Цилиндрические функции: различные представления, производящая функция, асимптотика, ортогональность, ряды Фурье — Бесселя.

4.2. Примеры применения цилиндрических функций при решении задач математической физики.

4.3. Эллиптические интегралы.

4.4. Конформное отображение полуплоскости на данный прямоугольник.

4.5. Электростатическое поле двух прямоугольных полюсов.

Программу спецкурса
«Дополнительные главы
теории функций комплексного переменного»
составил д.ф.-м.н. А. С. Романов