Алгебра и аналитическая геометрия

Лектор — Александр Петрович Ульянов

1 02.09.08	Система выставления оценок.	
	Краткое содержание курса.	
	Векторы на плоскости. Операции над векторами. Ориентированная площадь параллелограмма.	
	Преобразования координат и матричный язык. Умножение матриц.	
2 04.09.08	Геометрическое определение комплексных чисел.	
	Алгебраическая и экспоненциальная формы комплексных чисел. Умножение и деление. Возведение комплексного числа в степень. Формула Муавра.	
	Комплексная экспонента.	
	Извлечение корня из комплексного числа, корни из единицы.	
	Картинки функций комплексного переменного.	
3 09.09.08	Предмет и задачи аналитической геометрии.	
	Уравнения эллипса, параболы и гиперболы в полярной системе координат. Фокус, директриса, эксцентриситет. Канонические уравнения в прямоугольных координатах.	
	Фокальные, дипольные, оптические свойства.	
	Уравнение касательной к эллипсу, параболе и гиперболе.	
	Системы линейных уравнений и их решения. Основная и расширенная матрицы системы. Совместные и несовместные, определённые и неопределённые системы.	
	Эквивалентные системы. Элементарные преобразования строк.	
4 11.09.08	Картинки с эллипсами, параболами и гиперболами.	
	Метод последовательного исключения неизвестных.	
	Ранг матрицы. Критерий совместности линейной системы.	
	Определители малых порядков. Формулы Крамера.	
	Элементарные преобразования определителей.	
5 16.09.08	Векторы в пространстве. Коллинеарность и компланарность. Линейная (не)зависимость системы векторов. Реперы.	
	Скалярное произведение векторов, его билинейность. Угол между векторами. Ортогональная проекция вектора на ось.	
	Смешанное произведение векторов. Объём параллелепипеда. Ориентация репера. Метод ортогонализации. Повороты.	
	Векторное произведение векторов. Площадь параллелограмма.	
	Двойное векторное произведение, тождество Якоби.	
6 18.09.08	Картинки к предыдущей лекции.	
	Задание прямых и плоскостей линейными уравнениями.	
	Нормаль к прямой на плоскости и к плоскости в пространстве. Нормальные уравнения прямой и плоскости.	
	Направляющий вектор, параметрическое задание прямой. Параметрическое задание плоскости.	
	Уравнение прямой по двум её точкам. Уравнение плоскости по трём её точкам.	
	Уравнения по точкам через определители и ранги.	
	Переход от одного способа задания прямой или плоскости к другому.	
	Взаимное расположение прямых и плоскостей. Определение расположения с применением скалярного, векторного и смешанного произведений.	

7 23.09.08	Целые числа. Общие делители, наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Деление с остатком и алгоритм Эвклида.	
	Разложение положительного целого числа в произведение простых.	
	Бесконечность множества простых чисел.	
	Многочлены от одной буквы. Алгоритм деления многочленов с остатком.	
8 25.09.08	Проекции и перпендикуляры. Расстояние от точки до прямой и до плоскости.	
	Расстояния между прямыми и плоскостями. Скрещивающиеся прямые.	
	Определение взаимного расположения прямых и плоскостей условиями в рангах. Картинки различных случаев.	
	Сходство свойств делимости многочленов и целых чисел. Делители многочлена, НОД и НОК. Аналог алгоритма Эвклида.	
	Неприводимые многочлены.	
	Корни многочлена. Теорема Безу. Кратность корня.	
	Существование корня комплексного многочлена. Идея доказательства.	
	Разложение многочлена на неприводимые множители над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$.	
9 30.09.08	Рациональные функции, операции над ними. Разложение рациональной функции в сумму простейших дробей.	
	Понятия кольца и поля. Простейшие примеры.	
	Кольцо многочленов от одной буквы над произвольным полем. Поле частных.	
	Кольцо квадратных матриц. Свойства умножения: ассоциативность, некоммутативность, нильпотенты.	
	Примеры числовых колец и полей.	
	Кольца вычетов. Примеры конечных полей. Характеристика поля.	
10 02.10.08	Линейные пространства строк и столбцов. Аксиомы линейного пространства.	
	Линейные комбинации, линейная оболочка.	
	Линейная зависимость векторов.	
	Базис. Координаты вектора относительно выбранного базиса.	
	Существование базиса. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса.	
	Размерность линейного пространства. Ранг системы векторов.	
11 07.10.08	Ранг матрицы по строкам/столбцам. Совпадение рангов.	
	Критерий совместности системы линейных уравнений.	
	Однородные линейные системы, пространство решений.	
	Неоднородные линейные системы, многообразие решений.	
	Подпространства линейного пространства, их пересечение и сумма. Формула размерностей Грассмана.	
12 09.10.08	Прямая сумма подпространств.	
	Дополнение к подпространству.	
	Пространство матриц. Матричные единицы. Транспонирование.	
	Матрицы специального вида: скалярные, диагональные, треугольные. Симметрические и кососимметрические матрицы.	
	Дальнейшие примеры линейных пространств.	
13 14.10.08	Линейные отображения пространств столбцов, биекция с матрицами.	
	Образы и прообразы подпространств при линейных отображениях. Образ и ядро отображения.	
	Композиция линейных отображений. Ассоциативность умножения матриц. Ранг произведения матриц.	
	Выбор базиса как изоморфизм с координатным пространством.	

14 16.10.08	Матрица линейного отображения в базисах.	
	Смена базиса, матрица перехода.	
	Изменение матрицы отображения при смене базисов.	
	Простейший вид матрицы линейного отображения. Структура линейного отображения.	
15 21.10.08	Различные подходы к понятию определителя.	
	Перестановки. Инверсии и чётность перестановки. Комбинаторная формула полного раскрытия определителя.	
	Минор и алгебраическое дополнение. Раскрытие определителя по строке или столбцу. Определитель (блочной) треугольной матрицы.	
16 23.10.08	Полилинейность и кососимметричность определителя. Характеризация определителя этими свойствами (без доказательства).	
	Элементарные преобразования определителей.	
	Определитель произведения матриц (два с половиной доказательства).	
	Критерий (не)вырожденности матрицы. Обратная матрица. Формулы Крамера.	
	Ранг матрицы по минорам, эквивалентность с прежними определениями. Метод окаймляющих миноров (с неполным доказательством).	
17 27.10.08	Пространство линейных отображений и пространство линейных операторов.	
	Ранг и дефект линейного оператора.	
	Примеры линейных операторов: масштабирование, проекторы, дифференцирования.	
	Инвариантные подпространства. Разложение оператора в прямую сумму.	
	Диагонализируемые операторы. Примеры недиагонализируемых операторов: поворот, дифференцирование.	
18 28.10.08	Характеристический многочлен матрицы и оператора. Теорема Гамильтона — Кэли (без доказательства).	
	Собственные векторы и собственные значения оператора.	
	Собственные и корневые подпространства. Геометрическая и алгебраическая кратности корня. Спектр оператора.	
	Прямота суммы собственных подпространств.	
	Критерий диагонализируемости линейного оператора (формулировка).	
19 11.11.08	Критерий диагонализируемости линейного оператора (доказательство). Диагонализируемость оператора с простым спектром.	
	Причины недиагонализируемости. Формулировка корневого разложения.	
	Понятие алгебры над полем.	
	Алгебра многочленов. Алгебра матриц. Алгебра линейных операторов. Подалгебры блочных матриц.	
	Подалгебра, порождённая оператором. Минимальный многочлен оператора.	
20 13.11.08	Картинки поверхностей второго порядка: эллипсоиды, параболоиды, гиперболоиды, конусы, цилиндры, распадающиеся квадратичные поверхности.	
	Анимации с изменением коэффициентов в общем уравнении квадрики.	
	Общее уравнение кривой и поверхности второго порядка. Постановка задачи приведения квадрики к каноническому виду.	
	Ортонормированные базисы. Ортогональные преобразования и ортогональные матрицы. Общий вид ортогональных 2×2 и 3×3 матриц.	
21 18.11.08	Вещественные симметричные матрицы. Диагонализация симметричной матрицы ортогональным преобразованием.	
	Приведение квадрики к каноническому виду.	
	Аффинная классификация квадрик и их аффинные инварианты.	
	Метрические инварианты квадрик.	

22 20.11.08	Стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^n$. Эрмитово сопряжение комплексной матрицы. Унитарные матрицы.	
	Метод ортогонализации Грама — Шмидта. QR-разложение.	
	Унитарная триангуляция комплексной матрицы.	
	Вывод спектральных свойств вещественной симметричной матрицы.	
23 25.11.08	Билинейные формы. Симметричные и кососимметричные билинейные формы.	
	Квадратичные формы. Поляризация.	
	Выбор базиса и задание билинейной формы матрицей.	
	Изменение матрицы формы при смене базиса. Конгруэнтность матриц. Ранг формы.	
	Метод Лагранжа приведения формы к каноническому виду.	
24 27.11.08	Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$.	
	Закон инерции для вещественных квадратичных форм. Индексы инерции, сигнатура. Невырожденные формы. Положительно и отрицательно определённые формы. Неположительно и неотрицательно полуопределённые формы.	
	Главные миноры. Определение сигнатуры методом Якоби.	
	Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы.	
25 02.12.08	Схема доказательства корневого разложения.	
	Ниль-цепи и жордановы таблицы. Линейная независимость жордановой системы.	
	Отыскание жорданова базиса нильпотентного оператора.	
	Жорданова нормальная форма матрицы.	
	Функции от матриц. Матричная экспонента.	
26 04.12.08	Абстракция свойств множества преобразований в понятие группы.	
	Простейшие примеры групп: циклические группы, группы перестановок, различные группы движений плоскости.	
	Классические группы матриц.	
	Обобщённые ортогональные группы. Группа Лоренца.	
27 08.12.08	Морфизмы групп. Ядро и образ морфизма. Изоморфизмы. Примеры.	
	Действие группы на множестве. Орбиты и стабилизаторы.	
	Действие группы линейными операторами (линейное представление).	
	Действия группы на себе сдвигами и сопряжениями.	
28 09.12.08	Строение группы $\mathbf{SU}_2$.	
	Матричное представление алгебры кватернионов. Сопряжение, норма, обращение кватерниона.	
	Чисто мнимые кватернионы, связь их умножения со скалярным и векторным произведениями в $\mathbb{R}^3$.	
	Кватернионы и вращения трёхмерного пространства. Морфизм групп $\pi\colon \mathbf{SU}_2 \to \mathbf{SO}_3$.	
29 11.12.08	Классические матричные алгебры Ли.	
	Изоморфизм алгебр $\mathfrak{su}_2$ и $\mathfrak{so}_3$.	
	Полилинейные и кососимметричные функции строк матрицы. Внешние формы.	
30 16.12.08	Алгебра Грассмана пространства $\mathbb{R}^3$.	
	Алгебры Вейля.	
	Обзор курса и консультация.	