Высшая алгебра и аналитическая геометрия

Лектор — Александр Петрович Ульянов

Оглавление

Двумерная геометрия

Системы координат на плоскости. Векторы на плоскости, их координаты. Операции с векторами. Ориентированная площадь параллелограмма.

Смена прямоугольной системы координат, матрица перехода. Композиция переходов и умножение матриц. Преобразования плоскости: ортогональные и изометрические, линейные и аффинные.

Геометрическое определение комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексных чисел. Алгебраические операции. Сопряжение. Представление движений плоскости с помощью комплексных чисел. Комплексная экспонента, формула Эйлера. Возведение комплексного числа в степень, формула Муавра.

Фигуры и уравнения. Определение и полярные уравнения эллипса, параболы, гиперболы. Фокусы и директрисы, эксцентриситет. Канонические уравнения. Исследование формы: симметрии, вершины, полуоси, асимптоты. Свойства: фокальные, дипольное, оптические. Уравнение касательной.

Системы линейных уравнений

Системы линейных уравнений и их решения. Матричный язык. Совместные и несовместные, определённые и неопределённые системы. Эквивалентные системы. Элементарные преобразования строк. Ступенчатый вид. Метод последовательного исключения неизвестных. Ранг матрицы. Критерий совместности системы.

Определители малых порядков. Элементарные преобразования определителей.

Трёхмерная геометрия

Векторы в пространстве. Коллинеарность и компланарность. Линейная (не)зависимость системы векторов. Реперы.

Скалярное произведение векторов, его билинейность. Норма вектора. Углы. Ортогональная проекция вектора на ось.

Смешанное произведение векторов. Ориентированный объём параллелепипеда. Ортогонализация репера, поворот репера. Ориентация репера.

Векторное произведение векторов. Ориентированная площадь параллелограмма. Двойное векторное произведение, тождество Якоби.

Задание прямых и плоскостей линейными уравнениями. Нормаль к прямой на плоскости и к плоскости в пространстве. Нормальные уравнения прямой и плоскости. Направляющий вектор, параметрическое задание прямой. Параметрическое задание плоскости. Уравнение прямой по двум её точкам. Уравнение плоскости по трём её точкам. Уравнения по точкам через определители и ранги. Переход от одного способа задания прямой или плоскости к другому.

Расстояние от точки до прямой и до плоскости. Расстояние между скрещивающимися прямыми. Проекции и перпендикуляры.

Взаимное расположение прямых и плоскостей. Определение расположения по нормалям и направляющим векторам. Условия в рангах.

Проверить, что

(a) $\sigma_a\sigma_b - \sigma_b\sigma_a = 2i\varepsilon_{abc}\sigma_c$, где $\{a,b,c\} = \{1,2,3\}$ и $\varepsilon_{abc} = \operatorname{sign}\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3\\ a & b & c\end{smallmatrix}\right)$;

(b) $\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_a = 2\delta_{ab}\sigma_0$ при $a, b \neq 0$, где δ_{ab} — символ Кронекера;

(c) множество $\{i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$ образует над $\mathbb{R}$ базис $\mathfrak{su}_2$;

(d) множество $\{i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$ образует над $\mathbb{C}$ базис $\mathfrak{sl}_2$;

(e) множество $\{\sigma_0, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$ образует над $\mathbb{R}$ базис $\mathfrak{u}_2$;

(f) множество $\{\sigma_0, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$ образует над $\mathbb{C}$ базис $\mathfrak{gl}_2$.

Задания по высшей алгебре и аналитической геометрии
составил А. П. Ульянов

Кольца и поля

Делимость в целых числах. Общие делители, наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух чисел. Алгоритм деления с остатком. Алгоритм Эвклида. Простые числа. Разложение числа в произведение простых.

Многочлены от одного переменного. Сумма и произведение многочленов. Делители многочлена, НОД и НОК по аналогии с целыми числами. Алгоритм деления с остатком. Алгоритм Эвклида.

Извлечение корня из комплексного числа, корни из единицы. Корни многочлена. Теорема Безу. Кратность корня. Существование корня комплексного многочлена (без доказательства). Неприводимые многочлены. Разложение многочлена на неприводимые множители над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$.

Рациональные функции, операции над ними. Разложение рациональной функции в сумму простейших дробей.

Понятия кольца и поля. Простейшие примеры. Кольцо многочленов от одного переменного над произвольным полем. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Кольцо матриц. Поле частных. Примеры числовых колец и полей. Кольца вычетов. Примеры конечных полей. Характеристика поля.

Линейные пространства

Линейные пространства вещественных строк и столбцов. Аксиомы линейного пространства. Линейные комбинации, линейная оболочка. Линейная зависимость векторов. Базис. Координаты вектора относительно выбранного базиса. Существование базиса. Размерность линейного пространства. Ранг системы векторов. Ранг матрицы по строкам и по столбцам. Совпадение рангов.

Однородные системы линейных уравнений. Пространство решений. Неоднородные системы линейных уравнений. Многообразие решений. Критерий совместности.

Подпространства линейного пространства. Пересечение и сумма подпространств. Формула размерностей Грассмана. Прямая сумма подпространств. Дополнение к подпространству. Фактор-пространство.

Пространство матриц. Матричные единицы. Транспонирование. Матрицы специального вида: скалярные, диагональные, треугольные. Симметрические и кососимметрические матрицы.

Линейные отображения

Линейные отображения пространств столбцов, биекция с матрицами. Образы и прообразы подпространств. Образ и ядро линейного отображения, теорема о сумме их размерностей. Композиция линейных отображений. Ассоциативность умножения матриц. Ранг произведения матриц.

Выбор базиса как изоморфизм с координатным пространством. Матрица линейного отображения в базисах. Смена базиса, матрица перехода. Изменение матрицы отображения при смене базисов. Структура линейного отображения.

Определители

Различные подходы к понятию определителя. Перестановки. Инверсии и чётность перестановки. Комбинаторная формула полного раскрытия определителя. Минор и алгебраическое дополнение. Раскрытие определителя по строке или столбцу. Определитель (блочной) треугольной матрицы.

Полилинейность и кососимметричность определителя. Характеризация определителя этими свойствами (без доказательства). Элементарные преобразования определителей. Определитель произведения матриц.

Критерий невырожденности матрицы. Обратная матрица. Формулы Крамера.

Ранг матрицы по минорам, эквивалентность с прежними определениями. Метод окаймляющих миноров (без доказательства).

Линейные операторы

Пространство линейных операторов. Ранг и дефект линейного оператора. Примеры линейных операторов: масштабирование, проекторы, дифференцирование.

Понятие алгебры над полем. Алгебра многочленов. Алгебра матриц. Алгебра линейных операторов. Подалгебры блочных матриц. Подалгебра, порождённая одним оператором. Минимальный многочлен оператора.

Инвариантные подпространства. Разложение оператора в прямую сумму. Диагонализируемые операторы. Примеры недиагонализируемых операторов: дифференцирование, поворот.

Задание 7 (сдать к 28 декабря)

1. Доказать, что множество $\mathbf{O}_n(\mathbb{Z})$ всех целочисленных ортогональных $n \times n$ матриц образует группу относительно умножения. Найти порядок этой группы.

2. (a) Доказать, что множество функций $z \mapsto f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, где z, a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ и $ad - bc \neq 0$, образует группу относительно операции композиции функций.

(b) Каждой матрице $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ сопоставим функцию $f(z)$ из пункта (a). Будет ли это отображение морфизмом групп? Найти его ядро.

3. Найти порядок группы вращений (a) правильного тетраэдра; (b) куба; (c) правильного додекаэдра.

4. В алгебре кватернионов $\mathbb{H}$ решить уравнение $X^2 + 1 = 0$.

5*. Привести к жордановой форме матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -5 \\ -1 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Выписать все 2-мерные инвариантные подпространства для оператора, заданного в некотором базисе каждой из этих матриц.

6*. Доказать, что элементарными преобразованиями строк и столбцов над $\mathbb{Z}$ любую целочисленную матрицу можно привести к виду $\left[\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, где $A = \operatorname{diag}\{d_1, \ldots, d_r\}$ и $d_k | d_{k+1}$ для всех $k = 1, 2, \ldots, r-1$.

7*. Для многочлена f от переменных x_1, x_2, x_3, x_4 положим

$$\operatorname{Sym}(f) = \big\{\sigma \in \mathbf{S}_4 \;\big|\; f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)\big\}.$$

Доказать, что $\operatorname{Sym}(f)$ — подгруппа в $\mathbf{S}_4$. Найти $\operatorname{Sym}(x_1x_2 + x_3x_4)$.

8*. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

9*. (*Матрицы Паули*) Рассмотреть комплексные матрицы

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Задание 6 (сдать к 14 декабря)

1. Дополнить список векторов

$$\left\langle (1,2,-1,1)^\top, (2,-2,-1,1)^\top \right\rangle$$

до ортогонального базиса эвклидова пространства $\mathbb{R}^4$.

2. Методом Лагранжа найти канонический вид квадратичных форм

(a) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

3. Найти нормальный вид над $\mathbb{R}$ и сигнатуру квадратичных форм

(a) $3x_1^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

4. При каких значениях λ

(a) квадратичная форма $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$ положительно определена?

(b) квадратичная форма $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$ отрицательно определена?

5. Найти число классов эквивалентности над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$ квадратичных форм от n переменных.

6. Найти $\exp(A\pi)$ для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

7*. (a) Доказать, что ненулевая нильпотентная матрица не подобна диагональной матрице.

(b) Доказать, что всякая комплексная матрица A такая, что $A^k = E$ при некотором $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, подобна диагональной матрице, и найти вид последней.

8*. Доказать, что если матрицы A и B коммутируют, то найдётся такая унитарная матрица U, что матрицы $U^\dagger A\,U$ и $U^\dagger B\,U$ обе диагональны.

Подобие матриц. Характеристический многочлен матрицы. Характеристический многочлен оператора. Теорема Гамильтона–Кэли. Собственные векторы и собственные значения оператора. Собственные и корневые подпространства. Геометрическая и алгебраическая кратности собственного значения (корня). Спектр оператора. Прямота суммы собственных подпространств. Критерий диагонализируемости линейного оператора. Формулировка корневого разложения.

Квадратичные кривые и поверхности

Ортонормированные базисы. Ортогональные преобразования. Ортогональные 2×2 и 3×3 матрицы. Вещественные симметричные матрицы, свойства их собственных значений и собственных векторов. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта.

Картинки поверхностей второго порядка: эллипсоиды, параболоиды, гиперболоиды, конусы, цилиндры, распадающиеся поверхности. Сводные таблицы типов квадратичных кривых и поверхностей.

Приведение общего уравнения квадрики к каноническому виду преобразованием прямоугольных координат. Метрическая и аффинная классификации квадрик. Метрические инварианты уравнения квадрики.

Квадратичные формы

Билинейные формы. Симметричные и кососимметричные билинейные формы. Квадратичные формы. Поляризация. Выбор базиса и задание билинейной формы матрицей. Изменение матрицы формы при смене базиса. Конгруэнтность матриц. Ранг формы. Метод Лагранжа приведения формы к каноническому виду.

Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$. Закон инерции для вещественных квадратичных форм. Индексы инерции, сигнатура. Положительно и отрицательно определённые формы. Неположительно и неотрицательно полуопределённые формы. Главные миноры. Определение сигнатуры методом Якоби. Положительно определённые формы. Критерий Сильвестра.

Жорданова нормальная форма

Характеристический многочлен нильпотентного оператора. Разложение пространства в прямую сумму ядра и образа некоторой степени оператора. Свойства корневых подпространств. Доказательство корневого разложения.

Ниль-цепи и жордановы таблицы. Линейная независимость жордановой системы. Отыскание жорданова базиса нильпотентного оператора. Жорданова нормальная форма матрицы. Функции от матриц. Матричная экспонента.

Примеры групп

Понятие группы. Группа поворотов плоскости. Циклические группы, группы перестановок. Таблица умножения в группе. Группы, порождённые отражениями. Группы сдвигов. Решётки. Кристаллографические группы.

Классические группы матриц. Обобщённые ортогональные группы: группа Лоренца, симплектические группы.

Морфизмы групп, изоморфизмы. Действие группы на множестве. Действия группы на себе. Орбиты и стабилизаторы.

Примеры алгебр

Строение группы $\mathbf{SU}_2$. Алгебра кватернионов. Сопряжение, норма, обращение кватерниона. Чисто мнимые кватернионы, связь их умножения со скалярным и векторным произведениями. Спинорное накрытие $\mathbf{SU}_2 \to \mathbf{SO}_3$. Кватернионы и вращения трёхмерного пространства.

Классические матричные алгебры Ли.

Полилинейные и кососимметричные формы (внешние формы). Примеры: определитель, миноры. Алгебры Грассмана.

Дифференциальные операторы. Алгебры Вейля.

Литература

1. *А. П. Ульянов.* Конспект лекций по алгебре и геометрии.
2. *Н. И. Александрова.* Семинары по высшей алгебре и аналитической геометрии.
3. *А. И. Кострикин.* Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры.
4. *А. И. Кострикин.* Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.
5. *А. Г. Курош.* Курс высшей алгебры.
6. *Д. В. Беклемишев.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

6. Проверить истинность следующего утверждения: поверхность второго порядка является поверхностью вращения тогда и только тогда, когда её характеристическое уравнение имеет кратный корень.

7. Найти условие, при котором среди плоских сечений конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

имеются равносторонние гиперболы.

8*. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}.$$

9*. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3^2 & x_3^3 & \dots & x_3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

10*. Пусть $\mathbb{R}[x]_n$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$. Доказать, что он нильпотентен, и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

11*. Найти объём трёхмерного эллипсоида, заданного общим уравнением.

10*. Записать в виде определителя уравнение окружности, проходящей через точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), не лежащие на одной прямой.

Задание 5 (сдать к 30 ноября)

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 7 & 5 & 9 \\ -5 & 0 & -4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ -5 & -9 & -7 \end{bmatrix}.$$

2. Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

(a) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 7x + 9y + 16 = 0$;

(b) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 16 = 0$;

(c) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5y + 2 = 0$;

(d) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5y - 2 = 0$.

3. Найти канонические уравнения и расположение квадрик:

(a) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z + 2 = 0$;

(b) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$;

(c) $4x^2 + 49y^2 + z^2 - 28xy + 4xz - 14yz + 8x - 28y + 4z + 3 = 0$;

(d) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$;

(e) $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$.

4. Определить аффинные типы квадрик:

(a) $5x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz + 4yz - 2x - 8y - 12z + 10 = 0$;

(b) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + x - 4y - 3z + 2 = 0$;

(c) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$;

(d) $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz - 6x + 6y - 12z + 9 = 0$;

(e) $x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 2xy + 4xz - 4yz - 6x + 6y - 12z + 9 = 0$.

5. Выписать множество центров каждой квадрики в задачах 3 и 4.

7. *Д. К. Фаддеев.* Лекции по алгебре.
8. *В. Босс.* Лекции по математике. Линейная алгебра.
9. *А. И. Кострикин, Ю. И. Манин.* Линейная алгебра и геометрия.
10. *А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев.* Геометрия.
11. *А. В. Погорелов.* Аналитическая геометрия.
12. *П. С. Моденов.* Аналитическая геометрия.
13. *В. А. Ильин, Э. Г. Позняк.* Аналитическая геометрия.
14. *А. И. Кострикин.* Сборник задач по алгебре.
15. *И. В. Проскуряков.* Сборник задач по линейной алгебре.
16. *Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский.* Сборник задач по высшей алгебре.
17. *С. В. Бахвалов, П. С. Моденов, А. С. Пархоменко.* Сборник задач по аналитической геометрии.
18. *Л. А. Беклемишева и др.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.

План семинаров

Преобразования систем координат, матрицы	2 часа
Комплексные числа	2 часа
Эллипс, парабола, гипербола	2 часа
Системы линейных уравнений, метод исключения неизвестных, ранг матрицы	3 часа
Трёхмерная векторная алгебра	3 часа
Прямые и плоскости	2 часа
Многочлены и их корни, разложение дроби на простейшие	4 часа
Кольца и поля	2 часа
Обратная матрица, матричное уравнение $AX = B$	2 часа
Линейные пространства, базисы	2 часа
Системы линейных уравнений, фундаментальные решения, многообразие решений	3 часа
Действия с подпространствами, базисы суммы и пересечения	2 часа
Смена базиса, матрица перехода	2 часа
Методы вычисления определителей	2 часа
Линейные отображения и матрицы, линейные операторы	2 часа
Нахождение базисов ядра и образа оператора	2 часа
Собственные числа и векторы	3 часа
Диагонализация матрицы оператора	3 часа
Эвклидовы пространства, процесс ортогонализации	2 часа

Кривые и поверхности второго порядка, приведение к каноническому виду	4 часа
Квадратичные формы, метод Лагранжа	2 часа
Вещественные квадратичные формы	2 часа
Жорданова нормальная форма матрицы, функции от матрицы, матричная экспонента	4 часа
Группы	4 часа
Кватернионы, матрицы Паули	2 часа
Контрольные работы	3 часа

Программу лекций и план семинарских занятий по высшей алгебре и аналитической геометрии составил А. П. Ульянов

Задания по высшей алгебре и аналитической геометрии

Примечания:

- Задачи, помеченные звёздочкой, не являются обязательными для получения допуска, однако баллы приносят.
- В стандартных вычислительных задачах преподаватель может разнообразить числа.

Задание 1 (сдать к 21 сентября)

1. Изучить множество матриц $\mathbb{F} = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right] \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

(a) Проверить ассоциативность и коммутативность умножения матриц этого типа.

(b) Найти формулу обращения такой матрицы.

(c) Решить в $\mathbb{F}$ уравнение $X^2 + 1 = 0$.

(d) Вычислить матрицу $\left[\begin{smallmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right]^n$.

2. Доказать тождество $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\,|z|^2 + 2\,|w|^2$, где z, $w \in \mathbb{C}$, и указать его геометрический смысл.

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & -z & \dots & -z \\ z & 0 & -z & \dots & -z \\ z & z & 0 & \dots & -z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & z & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & z & z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}.$$

6. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

7. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = (2,3,5)^\top, \qquad \mathbf{a}_2 = (0,1,2)^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = (1,0,0)^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = (1,1,1)^\top, \qquad \mathbf{b}_2 = (1,1,-1)^\top, \qquad \mathbf{b}_3 = (2,1,2)^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

8. Найти базисы ядра и образа оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9*. Доказать, что любые две прямые пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, содержатся в некотором трёхмерном линейном многообразии в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что любые две плоскости пространства $\mathbb{R}^n$ содержатся в линейном многообразии размерности не более 5.

6. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$:

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle (1,0,0,1)^\top,\ (0,1,2,-1)^\top,\ (2,-1,-1,0)^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle (1,0,1,0)^\top,\ (0,1,-1,3)^\top,\ (4,-1,-1,1)^\top \right\rangle.$$

7. Доказать, что если матрицы A и B обе кососимметрические, то их коммутатор $[A,B]$ — кососимметрическая матрица.

8. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства всех симметрических, кососимметрических и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$. Доказать, что $\mathcal{A} \oplus \mathcal{L} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{S}$.

9*. (a) Найти все обратимые элементы, все делители нуля и все нильпотентные элементы в кольцах $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}_2[i]$ и $\mathbb{Z}_3[i]$, где $i^2+1=0$.

(b) Определить, какие из этих колец являются полями.

10*. Пусть α — комплексный корень многочлена $p \in \mathbb{Q}[x]$, неприводимого над $\mathbb{Q}$. Найти размерность над $\mathbb{Q}$ линейного пространства $\mathbb{Q}[\alpha]$, состоящего из чисел вида $f(\alpha)$, где $f \in \mathbb{Q}[x]$.

Задание 4 (сдать к 9 ноября)

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = (1,2,0)^\top, \qquad \mathbf{a}_2 = (0,1,-1)^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = (-1,1,3)^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = (2,3,1)^\top, \qquad \mathbf{b}_2 = (2,1,-3)^\top, \qquad \mathbf{b}_3 = (-2,6,8)^\top.$$

2. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

3. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 2&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&0\\0&3&3&0 \end{bmatrix}.$$

3. Найти тригонометрическую форму следующих чисел, где $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\frac{i - \operatorname{tg}\alpha}{i + \operatorname{tg}\alpha}; \quad (1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^{27}; \quad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{18}.$$

4. Используя комплексную экспоненту, выразить $\sin^7 x$ через первые степени синуса аргументов, кратных x.

5. Применяя комплексные числа, доказать равенство

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \cos\frac{(2k-1)\pi}{n} = 0$$

для всех целых $n > 1$.

6. Комплексные переменные z и w связаны соотношением $z + z^{-1} = 2w$. Определить, какую кривую пробегает w, когда z пробегает

(a) окружность $\{z \mid |z| = \rho\}$;

(b) луч $\{z \mid \arg z = \varphi\}$.

7. (a) Доказать, что эллипс и гипербола, имеющие общие фокусы, пересекаются под прямым углом.

(b) Доказать, что параболы, имеющие общий фокус и совпадающие, но противонаправленные оси, пересекаются под прямым углом.

8. Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся данной (a) окружности; (b) прямой.

9. Приведением к ступенчатому виду решить системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 6x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

10. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

Задание 2 (сдать к 5 октября)

1. Вершины (непрямоугольного) треугольника ABC и точка H пересечения его высот заданы радиус-векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{h}$. Доказать, что

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{a}\operatorname{tg} A + \mathbf{b}\operatorname{tg} B + \mathbf{c}\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}.$$

2. Найти площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$.

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)\cdot(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы из трёх уравнений

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где векторы $\mathbf{a}_i$ не компланарны.

5. Даны прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - ay + a - 1 = 0, \\ x - z + a^2 - 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра a эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $a = 2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

6. Найти формулы преобразования прямоугольных координат в пространстве, если начала двух систем различны, а концы единичных базисных векторов совпадают.

7. Определить, существуют ли такие многочлены u и v, что многочлен

$$(x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5)\,u(x) + (x^5 + x^2 - x + 1)\,v(x)$$

равен: (a) 1; (b) $x^2 + 1$; (c) $x^3 - x + 1$; (d) $x^4 + x^3 - x^2 + 1$.

8. Доказать, что многочлен $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ делится на многочлен $x^2 + x + 1$ при всех $m, n, p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

9*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u}\times\mathbf{v}\sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

10*. Натуральные числа r и s взаимно просты. Доказать, что всякий комплексный корень из единицы степени rs однозначно представляется в виде произведения корня степени r на корень степени s.

Задание 3 (сдать к 26 октября)

1. Разложить в сумму простейших дробей над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$:

(a) $\dfrac{x^2 + x + 1}{(x+1)^5}$; (b) $\dfrac{x^2}{x^4 + 4}$; (c) $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}$.

2. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 7 \\ 7 & 11 & 1 \\ 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5\}$ и все остальные векторы системы выразить через него для

$$\mathbf{a}_1 = (2, -1, 1, 0)^\top, \quad \mathbf{a}_2 = (1, 2, -3, 1)^\top, \quad \mathbf{a}_3 = (2, 5, -2, -6)^\top,$$
$$\mathbf{a}_4 = (5, -2, 0, 3)^\top, \quad \mathbf{a}_5 = (2, -3, 2, 2)^\top.$$

4. Найти систему линейных уравнений, решения которой — элементы линейного многообразия

$$\left\{(0, 1, 2, 3)^\top + \alpha(1, 0, -1, 2)^\top + \beta(3, 2, 1, 0)^\top\right\}.$$

5. При каких условиях данная линейная комбинация любых решений данной неоднородной системы линейных уравнений снова будет решением этой системы?