Введение

Освоение идей и методов линейной алгебры входит в математическую подготовку студентов многих специальностей, зачастую вызывая необходимость быстрого развития практического владения определённым набором абстрактных понятий. Многие типы нацеленных на это базовых вычислительных примеров и задач основаны на работе со строками или столбцами матрицы и отличаются высокой степенью алгоритмичности. В наши дни такие задачи легко поручить известным пакетам компьютерной алгебры, но этот способ их решения не служит достижению тех целей, ради которых они включены в программы университетских курсов. Поэтому, преподавателям и студентам приходится проводить длинные, скучные цепочки элементарных операций с целыми числами или рациональными дробями, требующих внимательности и большого количества тривиального переписывания данных, не изменённых на конкретном шаге. Поиск и исправление простейших ошибок отнимают столь дефицитное время.

В предлагаемом пособии разобран метод работы со строками и столбцами, способствующий значительному сокращению выкладок. Экономия достигается за счёт уменьшения частоты тривиального переписывания. При том, понимание совершаемого процесса если и требует бо́льших умственных усилий, чем в традиционном изложении, то лишь весьма небольших, совершаемых только в самом начале, да и небесполезных с точки зрения конечной цели: практического овладения основными понятиями линейной алгебры.

Фактически, речь идёт о методе скорейшего приведения матрицы к ступенчатому виду. Когда применение предлагаемого здесь метода к этой задаче освоено, остальные разбираемые его приложения достигаются незначительными модификациями или дополнительными шагами, во многом повторяющими те, что проводятся и в стандартном методе, сводящем различные задачи к поиску ступенчатого вида. Перечень этих приложений содержит много терминов, незнакомых студенту в начале курса, объяснения которым в этом пособии не даются, поскольку для этого имеются лекции и учебники.

Итак, излагаемый ниже метод применим:

- для решения систем линейных уравнений;
- для отыскания базиса линейной оболочки данных векторов;
- для определения ранга матрицы;
- для вычисления обратной матрицы;
- для вычисления матрицы перехода между двумя базисами;

- для решения матричных уравнений;
- для вычисления определителей;
- для отыскания базисов суммы и пересечения линейных оболочек данных наборов векторов;
- для вычисления матрицы заданного линейного оператора в данном базисе;
- для отыскания базисов ядра и образа линейного оператора;
- при отыскании собственных и корневых подпространств линейного оператора;
- при приведении матрицы линейного оператора к диагональному виду и, более общо, к жордановой нормальной форме.
- при приведении уравнения квадратичной кривой или поверхности к каноническому виду поворотом и сдвигом системы координат.

По сути, этот перечень покрывает львиную долю стандартных задач из курсов линейной алгебры и аналитической геометрии.

Приведение матрицы к ступенчатому виду

Пусть дана произвольная (прямоугольная) матрица A и требуется привести её к ступенчатому виду цепочкой элементарных преобразований строк. Под таковыми понимают:

(R1) умножение любой строки на ненулевой скаляр;
(R2) прибавление любой строки, умноженной на скаляр, к любой другой строке;
(R3) перестановка местами любой пары строк.

Стандартный метод заключается в последовательном занулении элементов матрицы, начиная с левого столбца и двигаясь вправо.

Пример. Рассмотрим применение этого стандартного метода в подробной записи. Обозначая через $A_{(k)}$ строку k текущей матрицы, будем указывать элементарное преобразование справа от его результата.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{исходная матрица}$$

$$\text{(R3)} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_{(1)} \leftrightarrow A_{(3)}$$

$$\text{(R2)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_{(2)} \leftarrow A_{(2)} + 3A_{(1)}$$

$$\text{(R2)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad A_{(4)} \leftarrow A_{(4)} - 2A_{(1)}$$

$$\text{(R3)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad A_{(2)} \leftrightarrow A_{(3)}$$

$$\text{(R2)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad A_{(3)} \leftarrow A_{(3)} + 2A_{(2)}$$

$$\text{(R2)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \qquad A_{(4)} \leftarrow A_{(4)} - A_{(2)}$$

$$\text{(R3)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_{(3)} \leftrightarrow A_{(4)}$$

$$\text{(R1)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_{(3)} \leftarrow -\tfrac{1}{6}A_{(3)}$$

$$\text{(R2)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_{(1)} \leftarrow A_{(1)} - 2A_{(3)}$$

$$\text{(R2)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_{(2)} \leftarrow A_{(2)} - 3A_{(3)}.$$

В этом примере ступенчатый вид получен почти буквальным следованием алгоритму последовательного исключения после 10 элементарных преобразований; количества их по типам R1, R2 и R3 здесь 1, 6 и 3. Как можно сократить писанину?

Можно заметить, что порядок строк в матрице по ходу вычислений совершенно не важен. Многие студенты успешно используют это наблюдение, устраняя таким образом все шаги типа R3. Для этого достаточно лишь привыкнуть следить за тем, какая строка является ведущей на данном шаге, не взирая на её положение в матрице.

Однако, раз порядок строк не играет существенной роли в вычислениях, можно значительно сократить запись каждого шага. Переписывание *всей* матрицы, в которой изменилась лишь одна строка, можно заменить тремя более короткими действиями:

(1) указать элементарное преобразование R, совершаемое на данном шаге;

(2) приписать снизу к матрице результат преобразования R, то есть новую строку;

(3) пометить как удалённую строку, к которой применялось R; вместо неё далее будет рассматриваться только что полученная новая строка.

Строки при этом полезно нумеровать, а удалённые не зачёркивать, а именно помечать (скажем, я ставлю сбоку значок $\times$). Такие пометки будут очень ценны, если впоследствии потребуется проверка правильности действий или поиск ошибки.

Вернёмся к разобранному выше примеру. После первого шага получим запись

$$\left[\begin{array}{rrrr} 0 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{ll} & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ & A_{(3)} \\ & A_{(4)} \\ & A_{(5)} = A_{(2)} + 3A_{(3)}. \end{array}$$

Продолжая, получим запись вычислений в виде таблицы

$$\left[\begin{array}{rrrr} 0 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{ll} \times & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ \times & A_{(3)} \\ \times & A_{(4)} \\ \times & A_{(5)} = A_{(2)} + 3A_{(3)} \\ \times & A_{(6)} = A_{(4)} - 2A_{(3)} \\ & A_{(7)} = A_{(5)} - 2A_{(1)} \\ \times & A_{(8)} = A_{(6)} - A_{(1)} \\ & A_{(9)} = -\tfrac{1}{6}A_{(8)} \\ & A_{(10)} = A_{(1)} - 3A_{(9)} \\ & A_{(11)} = A_{(3)} - 2A_{(9)}. \end{array}$$

Ступенчатым видом исходной матрицы A является матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} A_{(11)} \\ A_{(10)} \\ A_{(9)} \\ A_{(7)}, \end{matrix}$$

получаемая расположением в правильном порядке строк, оставшихся невычеркнутыми в конце процесса.

Обоснование метода

Этот короткий подраздел оперирует понятиями, вводимыми в курсе лекций позже, чем на практических занятиях начинают учиться отыскивать ступенчатый вид матриц. Студентам я рекомендую прочесть его бегло, но впоследствии вернуться для более вдумчивого чтения.

В чём же логика изложенного метода? Обозначим через $\mathcal{L}$ пространство строк матрицы A, то есть (в примере) линейную оболочку строк $A_{(1)}$, $A_{(2)}$, $A_{(3)}$ и $A_{(4)}$. Все остальные выписываемые строки являются линейными комбинациями исходных, а потому лежат в $\mathcal{L}$. На каждом шагу одна из «активных» (невычеркнутых) строк заменяется новой, желательно более простой численно, таким образом, что линейная оболочка активных строк всегда остаётся равной $\mathcal{L}$:

$$\langle A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)}, A_{(4)} \rangle = \langle A_{(1)}, A_{(5)}, A_{(3)}, A_{(4)} \rangle,$$

и так далее. Можно сказать, что вместо работы с матрицей, как в стандартном методе, излагаемый здесь метод смещает акцент на линейное пространство её строк и возвращается к матрице только на последнем шаге, когда считывается ответ. За счёт этого и достигается лаконичность выкладок.

В зависимости от конкретного приложения этого метода может быть удобно либо вычёркивать нулевые строки по мере их появления, либо оставлять их до окончания процесса.

Отыскание ранга матрицы

Задача отыскания ранга матрицы тут же сводится к приведению этой матрицы к ступенчатому виду, так как ранг сохраняется при элементарных преобразованиях строк, а по ступенчатому виду находится простым подсчётом количества ненулевых строк.

В рассмотренном выше примере последняя строка в итоговой ступенчатой матрице нулевая. Ненулевых строк остаётся три, поэтому ранг матрицы A равен трём.

Приведение матрицы к упрощённому виду

Понятие матрицы ступенчатого вида в нашем курсе введено таким образом, что каждая матрица имеет единственный ступенчатый вид (то есть приводится к нему элементарными преобразованиями строк). При вычислениях часто удобно пользоваться понятием близким, но менее ограничительным.

Определение. Матрица ранга r имеет **упрощённый** вид, если в ней найдутся r попарно не равных столбцов, каждый из которых является столбцом единичной матрицы, то есть содержит лишь один ненулевой элемент, причём он равен единице. Эти столбцы и эти единицы называются **главными**.

Несложно заметить, что матрица имеет упрощённый вид тогда и только тогда, когда перестановкой строк и столбцов из неё можно получить матрицу ступенчатого вида. Одну матрицу можно привести к единственному ступенчатому виду, но к разным упрощённым видам. Научившись чётко отделять ситуации, когда порядки строк и столбцов в матрицах важны и когда нет, а точнее, понимать последствия их перестановки в конкретных приложениях, можно обрести некоторую гибкость при вычислениях. Умело пользуясь ею, нередко удаётся отыскивать решение задачи в более простой форме.

Пример. Приведём матрицу

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

к ступенчатому виду и к упрощённому виду. Вычисляя

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 10 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \times & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ \times & A_{(3)} \\ \times & A_{(4)} = A_{(1)} - 3A_{(2)} \\ \times & A_{(5)} = A_{(3)} - 2A_{(2)} \\ & A_{(6)} = A_{(4)} - 2A_{(5)} \\ & A_{(7)} = \frac{1}{3}A_{(5)} \\ & A_{(8)} = A_{(2)} + A_{(7)}, \end{matrix}$$

находим ступенчатый вид, он же в частности и упрощённый:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычисляя

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{ll} \times & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ \times & A_{(3)} \\ \times & A_{(4)} = A_{(2)} + A_{(3)} \\ & A_{(5)} = A_{(1)} - 3A_{(3)} \\ & A_{(6)} = A_{(4)} + A_{(5)} \\ & A_{(7)} = A_{(3)} - A_{(5)}, \end{array}$$

находим другой упрощённый вид

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Удачный выбор главных столбцов здесь позволил избежать дробей.

Решение систем линейных уравнений

Система линейных уравнений $AX = B$ с матрицей коэффициентов A, известным столбцом B и неизвестным столбцом X эффективно решается путём приведения расширенной матрицы системы к ступенчатому или упрощённому виду.

Пример. Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 2x_3 + 4x_4 - 5x_5 = -6. \end{cases}$$

Уравнения не содержат x_2. Применяя описанный метод к расширенной матрице системы, получаем следующую таблицу:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{ll} \times & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ \times & A_{(3)} \\ \times & A_{(4)} = A_{(1)} + A_{(3)} \\ \times & A_{(5)} = A_{(2)} - 2A_{(3)} \\ & A_{(6)} = \frac{1}{3}A_{(5)} \\ & A_{(7)} = A_{(4)} + A_{(6)} \\ & A_{(8)} = A_{(3)} + 2A_{(6)}. \end{array}$$

Итак, система уравнений совместна. Она также избыточна: в таблице появилась нулевая строка. Остаются ненулевые строки

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 3 & 5 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} A_{(8)} \\ A_{(6)}, \end{array}$$

где рамкой выделены главные единицы, а столбцы помечены соответствующими им неизвестными. Меняя местами x_2 и x_3, получаем

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} A_{(8)} \\ A_{(6)}. \end{array}$$

Можно записать общее решение исходной системы в виде

$$\begin{cases} x_1 = -2x_4 - x_5 + 4, \\ x_3 = x_4 - 3x_5 + 5, \qquad (\text{тут была опечатка!}) \\ x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \text{ — произвольные.} \end{cases}$$

Или в форме столбцов, выделяя фундаментальную систему решений:

$$X = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Цепочку элементарных преобразований строк, выполняемых при решении системы $AX = B$, подбирают, исходя только из основной матрицы A; столбец B преобразуется вместе со столбцами основной матрицы, но значения его используются лишь на последнем шаге, когда считывается ответ.

Часто в задаче требуется решить несколько систем линейных уравнений, отличающихся лишь значениями известного столбца B. Поскольку эти значения не играют роли при выборе элементарных преобразований, разумно составить расширенную матрицу из матрицы A и всех данных столбцов $B^{(1)}, \ldots, B^{(k)}$ и работать с ней.

Пример. Решим систему $AX = B$ линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b_1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_5 = b_2, \\ x_1 + 11x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 18x_5 = b_3, \\ 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 9x_5 = b_4 \end{cases}$$

с правыми частями

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразуя расширенную матрицу из $8 = 5+3$ столбцов, приводим к упрощённому виду блок из пяти левых столбцов, соответствующих неизвестным $x_1, \ldots, x_5$. Комментарии к процессу даны ниже.

$$\left[\begin{array}{rrrrr|rrr}
1 & 3 & 3 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \\
1 & -1 & -2 & 0 & -3 & -2 & 1 & 1 \\
1 & 11 & 7 & 6 & 18 & 4 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 5 & 2 & 9 & 2 & -1 & 1 \\
0 & 8 & 4 & 4 & 12 & 4 & 0 & -1 \\
0 & 4 & 5 & 2 & 9 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -6 & 0 & -6 & 0 & 2 & \\
0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \\
\boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \\
0 & 4 & 0 & 2 & 4 & 2 & \frac{1}{3} & \\
0 & 2 & 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & \frac{1}{6} &
\end{array}\right]
\begin{array}{ll}
\times & A_{(1)} \\
\times & A_{(2)} \\
\times & A_{(3)} \\
\times & A_{(4)} \\
\times & A_{(5)} = A_{(3)} - A_{(1)} \\
\times & A_{(6)} = A_{(1)} - A_{(2)} \\
 & A_{(7)} = A_{(4)} - A_{(6)} \\
\times & A_{(8)} = A_{(5)} - 2A_{(6)} \\
 & A_{(9)} = -\frac{1}{6}A_{(8)} \\
 & A_{(10)} = A_{(1)} + 2A_{(9)} \\
\times & A_{(11)} = A_{(6)} - 2A_{(9)} \\
 & A_{(12)} = \frac{1}{2}A_{(11)}.
\end{array}$$

Строка $A_{(7)}$ показывает, что система с правой частью $B^{(3)}$ несовместна, ибо из её уравнений следует $0 = 1$, а также что системы с правыми частями $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ избыточны. Дальше работаем только с $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$; в итоге устанавливаем, что обе системы совместны.

Опуская нулевую строку $A_{(7)}$, получаем упрощённую матрицу

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
\left[\begin{array}{rrrrr|rr}
\boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\
0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\
0 & 2 & 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & \frac{1}{6}
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
A_{(10)} \\
A_{(9)} \\
A_{(12)}.
\end{array}$$

Как и прежде, здесь рамкой выделены главные единицы, а столбцы помечены соответствующими им неизвестными. Расположив неизвестные x_i иначе, мы переставляем столбцы матрицы коэффициентов системы. При этом пять левых столбцов дают ступенчатую матрицу

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & x_5 \end{array} \\
\left[\begin{array}{rrrrr|rr}
\boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\
0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\
0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 & 1 & \frac{1}{6}
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
A_{(10)} \\
A_{(9)} \\
A_{(12)}.
\end{array}$$

Общее решение можно выразить через параметры x_2 и x_5.

$$\text{Для } B^{(1)}: \begin{cases} x_1 = x_2 - x_5, \\ x_3 = - x_5, \\ x_4 = -2x_2 - 2x_5 + 1, \\ x_2, x_5 \in \mathbb{R} \text{ — произвольные.} \end{cases}$$

$$\text{Для } B^{(2)}: \begin{cases} x_1 = x_2 - x_5 - \frac{2}{3}, \\ x_3 = - x_5 - \frac{1}{3}, \\ x_4 = -2x_2 - 2x_5 + \frac{1}{6}, \\ x_2, x_5 \in \mathbb{R} \text{ — произвольные.} \end{cases}$$

Приведя исходную матрицу к ступенчатому виду, мы получили бы иную запись общего решения системы; параметрами послужили бы x_4 и x_5. В этом случае получилось бы больше дробных коэффициентов.

Конечно, тратиться на лишние перестановки столбцов не слишком удобно, но можно научиться выписывать общее решение системы прямо по упрощённому виду. На самом деле, даже выписывать упрощённый вид необходимости нет, поскольку всю информацию, определяющую полученное общее решение, можно сразу считать из оставшихся активными строк таблицы, в которой велись вычисления.

Обращение матрицы

Рассмотрим теперь матричное уравнение $AX = E$ с известной квадратной матрицей A и единичной матрицей E (того же размера). Тогда матрица X тоже должна быть квадратной; если она существует, это матрица A^{-1}, обратная к A. Каждый столбец $X^{(i)}$ является решением системы линейных уравнений $AX^{(i)} = E^{(i)}$. Матрицы коэффициентов этих систем одинаковы, а значит, здесь возникает частный случай разобранной выше ситуации. Так мы приходим к алгоритму вычисления обратной матрицы.

Пример. Найдём A^{-1} для матрицы

$$A = \left[\begin{array}{rrr} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Приписываем справа три столбца матрицы E, то есть саму единичную матрицу, затем приводим левую половину к ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr}
3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\
0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & -5
\end{array}\right]
\begin{array}{ll}
\times & A_{(1)} \\
\times & A_{(2)} \\
 & A_{(3)} \\
 & A_{(4)} = A_{(2)} + 2A_{(3)} \\
\times & A_{(5)} = A_{(1)} - 3A_{(3)} \\
 & A_{(6)} = A_{(5)} - A_{(4)}.
\end{array}$$

Выписываем оставшиеся активными строки:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} A_{(3)} \\ A_{(5)} \\ A_{(6)}. \end{array}$$

Матрица, стоящая в правой части, обратна исходной матрице A.

Если исходная матрица A вырождена, то есть обратной не имеет, то её ранг меньше её размера. Вырожденность A обнаруживается, как только в ходе вычислений в левой части появляется нулевая строка.

Пример. Найдём A^{-1} для матрицы

$$A = \left[\begin{array}{rrr} -3 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Через три шага (можно даже два) слева получаем нулевую строку:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -3 & 2 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{cl} \times & A_{(1)} \\ & A_{(2)} \\ \times & A_{(3)} \\ \times & A_{(4)} = A_{(1)} + 3A_{(2)} \\ & A_{(5)} = A_{(3)} - 2A_{(1)} \\ & A_{(6)} = A_{(4)} - 2A_{(5)}. \end{array}$$

Выходит, системы $AX^{(i)} = E^{(i)}$ несовместны. Значит, матрица A вырождена и не имеет обратной. Строки A линейно зависимы:

$$A_{(1)} + 7A_{(2)} - 2A_{(3)} = \mathbf{0},$$

и зануляющаяся нетривиальная комбинация исходных строк явно находится в ходе вычислений: обратите внимание на числа в правой половине строки $A_{(6)}$.

На самом деле, не только в строке $A_{(6)}$, но вообще в каждой строке этой и любой «такой» таблицы числа в правой половине есть коэффициенты линейной комбинации исходных строк, равной этой строке. «Такая» здесь означает, что начальная таблица есть матрица, расширенная приписыванием справа единичной матрицы.

Пример. Найдём A^{-1} для матрицы

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Конечно, вычисление в этом примере длиннее, чем для 3×3 матриц; однако обращение 4×4 матрицы по методу Крамера зачастую будет ещё более трудоёмким.

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \quad \begin{array}{cl} \times & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ \times & A_{(3)} \\ \times & A_{(4)} \\ \times & A_{(5)} = A_{(2)} + A_{(1)} \\ \times & A_{(6)} = \frac{1}{3}A_{(5)} \\ \times & A_{(7)} = A_{(4)} + A_{(3)} \\ \times & A_{(8)} = A_{(1)} - A_{(7)} \\ \times & A_{(9)} = \frac{1}{6}A_{(8)} \\ \times & A_{(10)} = \frac{1}{3}A_{(3)} \\ \times & A_{(11)} = A_{(7)} - A_{(10)} \\ \times & A_{(12)} = A_{(11)} + A_{(6)} \\ & A_{(13)} = -\frac{1}{2}A_{(12)} \\ & A_{(14)} = A_{(6)} - A_{(9)} \\ & A_{(15)} = A_{(9)} - A_{(13)} \\ & A_{(16)} = A_{(10)} + A_{(15)}. \end{array}$$

Итак, обратная матрица состоит из правых половинок строк $A_{(16)}$, $A_{(14)}$, $A_{(13)}$ и $A_{(15)}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\left[\begin{array}{rrrr} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Матрица перехода между двумя базисами

Пусть в пространстве столбцов даны два базиса и нужно найти матрицу перехода от одного к другому. Составим из столбцов обоих базисов по матрице и назовём эти матрицы A и B. По определению матрицы перехода, по её столбцам стоят координаты «новых» базисных векторов в «старом» базисе; значит, матрица перехода от A к B является решением матричного уравнения $AX = B$. Поскольку матрица A обратимая, в этом случае решение единственно: $X = A^{-1}B$. Чтобы найти его, можно сначала обратить A описанным выше методом, затем умножить A^{-1} на B. Однако, это не самое эффективное решение.

Хитрость в том, что умножение на B можно легко выполнить предварительно: вместо матрицы E справа к матрице A нужно приписать B. После приведения левой части к единичной матрице справа от неё получится требуемое произведение $A^{-1}B$.

Пример. Даны базисы $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ и $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ из столбцов

$$\mathbf{a}_1 = [3, -2, 1]^\top, \qquad \mathbf{a}_2 = [1, 1, 0]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [1, 0, 0]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2, 1, 0]^\top, \qquad \mathbf{b}_2 = [1, 0, 1]^\top, \qquad \mathbf{b}_3 = [0, 1, -1]^\top.$$

Найдём матрицу перехода от первого базиса ко второму. Составим столбцы в таблицу и приведём левую половину к ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -4 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{ll} \times & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ & A_{(3)} \\ & A_{(4)} = A_{(2)} + 2A_{(3)} \\ \times & A_{(5)} = A_{(1)} - 3A_{(3)} \\ & A_{(6)} = A_{(5)} - A_{(4)}. \end{array}$$

Матрица перехода состоит из правых половинок строк $A_{(3)}$, $A_{(4)}$ и $A_{(6)}$:

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Матричное уравнение $AX = B$

Решение такого уравнения в случае невырожденной матрицы A разобрано выше. Рассмотрим здесь аналогичную задачу для вырожденного случая. Несуществование обратной матрицы A^{-1} само по себе ещё не означает, что уравнение $AX = B$ в принципе неразрешимо. Если $\operatorname{rk} A \geqslant \operatorname{rk} B$, то решения могут существовать.

Пример. Дано матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \\ -5 & 8 & -3 \\ -4 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Легко заметить линейные зависимости столбцов в обеих частях равенства: $A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} = \mathbf{0}$ и $B^{(1)} + B^{(2)} + B^{(3)} = \mathbf{0}$. Можно даже угадать какие-то решения, например,

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Составим таблицу и приведём левую половину к ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -3 & 1 & -3 & 5 & -2 \\ 3 & -5 & 2 & -5 & 8 & -3 \\ 2 & -4 & 2 & -4 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{ll} \times & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ \times & A_{(3)} \\ \times & A_{(4)} = A_{(2)} - A_{(3)} \\ & A_{(5)} = A_{(1)} - A_{(3)} \\ \times & A_{(6)} = A_{(3)} - A_{(4)} \\ & A_{(7)} = A_{(6)} + 2A_{(5)} \\ & A_{(8)} = A_{(4)} - A_{(5)}. \end{array}$$

В строке $A_{(7)}$ выяснилось, что все три столбца начальной матрицы B дают совместные системы. Выпишем полезные строки:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} A_{(8)} \\ A_{(5)}. \end{array}$$

Теперь по ним нужно записать фундаментальные решения сопутствующей однородной системы $AX = \mathbf{0}$ и по одному частному решению неоднородной системы $AX = B^{(k)}$ для каждого столбца матрицы B. За параметр принимаем x_3. Подставляя $x_3 = 1$, находим фундаментальное решение; подставляя $x_3 = 0$, находим частные решения:

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Общее решение системы $AX = B^{(k)}$ есть линейное многообразие

$$\{X^{(k)} + \alpha_k X^{(0)} \mid \alpha_k \in \mathbb{R}\},$$

причём параметры α_1, α_2 и α_3 между собой независимы. Поэтому общее решение исходного матричного уравнения записывается в виде

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3],$$

или

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Отыскание линейных зависимостей

Пусть дано множество $\mathcal{X}$ векторов и требуется найти линейные зависимости между ними. Задача очень просто сводится к основной задаче приведения матрицы к ступенчатому виду:

(1) из векторов множества $\mathcal{X}$ по строкам составить матрицу A;
(2) привести A к ступенчатому виду A';
(3) восстановить выражение каждой нулевой строки A' как линейной комбинации исходных строк.

Все линейные зависимости между векторами в $\mathcal{X}$ будут следствиями (линейными комбинациями) выписанных комбинаций. Восстановление заметно облегчается, если совершаемые элементарные преобразования добросовестно задокументированы.

В простом варианте пометки, детализирующие каждое элементарное преобразование, позволяют раскрутить их обратно посредством подстановок.

Пример. (Пока нет)

В более развёрнутом варианте на каждом шаге видно выражение новой строки через исходные, как в примере на стр. 11. Однако при большом количестве векторов дополнительные столбцы существенно расширяют таблицу.

Пример. (Пока нет)

Совершенно иной способ отыскания линейных зависимостей не требует ни обратных подстановок, ни громоздких пометок. Он основан на том, что элементарные преобразования строк матрицы сохраняют все соотношения между её столбцами.

Пример. Даны векторы

$$\mathbf{a}_1 = [2, -1, 3, 5]^\top, \qquad \mathbf{a}_2 = [4, -3, 1, 3]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [3, -2, 3, 4]^\top,$$
$$\mathbf{a}_4 = [4, -1, 15, 17]^\top, \quad \mathbf{a}_5 = [7, -6, -7, 0]^\top.$$

Выберем среди них базис линейной оболочки $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5 \rangle$ и выразим остальные векторы через базисные.

Собираем столбцы в матрицу и приводим её к ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{rrrrr} 2 & 4 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & -3 & -2 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & 3 & 15 & -7 \\ 5 & 3 & 4 & 17 & 0 \\ 5 & 5 & 6 & 19 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{cl} \times & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ \times & A_{(3)} \\ \times & A_{(4)} \\ \times & A_{(5)} = A_{(3)} + A_{(1)} \\ \times & A_{(6)} = A_{(4)} - A_{(5)} \\ \times & A_{(7)} = A_{(1)} + A_{(2)} \\ \times & A_{(8)} = A_{(2)} + A_{(7)} \\ \times & A_{(9)} = A_{(5)} - 5A_{(7)} \\ & A_{(10)} = A_{(8)} - A_{(6)} \\ & A_{(11)} = A_{(9)} - A_{(10)} \\ \times & A_{(12)} = -\frac{1}{2}A_{(6)} \\ & A_{(13)} = A_{(7)} - A_{(12)} \\ & A_{(14)} = A_{(12)} - A_{(10)}. \end{array}$$

Оставшиеся строки

$$\left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \end{array}\right]$$

показывают, что множество $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ является искомым базисом, ибо первые три столбца тут главные, а в неглавных столбцах собраны коэффициенты представлений векторов $\mathbf{a}_4$ и $\mathbf{a}_5$ через базисные:

$$\mathbf{a}_4 = 2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + 4\mathbf{a}_3,$$
$$\mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 - 5\mathbf{a}_3.$$

Базисы суммы и пересечения подпространств

Рассмотрим задачу отыскания базисов суммы и пересечения двух подпространств, заданных в виде линейных оболочек двух множеств векторов: $\mathcal{A} = \langle \mathbf{a}_{(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{(m)} \rangle$ и $\mathcal{B} = \langle \mathbf{b}_{(1)}, \ldots, \mathbf{b}_{(n)} \rangle$.

Первый способ решения. Соберём векторы по строкам в матрицы A, B и составим из них блочную матрицу

$$\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & B \end{array}\right].$$

Приведём её к ступенчатому виду и отбросим нулевые строки. Их не будет вовсе, если предварительно найти базисы оболочек $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и заменить ими начальные множества строк. Ненулевые строки разобьём на две группы, глядя на то, нулевая у строки левая половина или нет. Ненулевые левые половины составляют базис суммы; ненулевые правые половины строк, у которых левые половины нулевые, составляют базис пересечения. Тут есть два отличия от предыдущих задач:

(1) приводить к ступенчатому виду нужно всю матрицу, а не только левую часть, как ранее;

(2) не обязательно доводить процесс до ступенчатого вида, введённого в курсе, ибо традиционная его версия, показанная ниже в примере, достаточна для нахождения требуемых базисов.

Второй способ решения. Задачу можно свести к отысканию линейных зависимостей между всеми исходными векторами.

Пример. Даны векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= [1,1,0,0,-1], & \mathbf{b}_1 &= [1,0,1,0,1],\\ \mathbf{a}_2 &= [0,1,1,0,1], & \mathbf{b}_2 &= [0,2,1,1,0],\\ \mathbf{a}_3 &= [0,0,1,1,1]; & \mathbf{b}_3 &= [1,2,1,2,-1]. \end{aligned}$$

Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Обе тройки векторов линейно независимы: для первой это видно непосредственно, для второй — после замены $\mathbf{b}_3$ на $\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, например. Вычисляем, как предписывает первый способ:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|rrrrr}
1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2\\
0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2\\
0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right]
\begin{array}{cl}
 & A_{(1)}\\
 & A_{(2)}\\
 & A_{(3)}\\
\times & A_{(4)}\\
\times & A_{(5)}\\
\times & A_{(6)}\\
\times & A_{(7)} = A_{(4)} - A_{(1)}\\
\times & A_{(8)} = A_{(7)} + A_{(2)}\\
\times & A_{(9)} = A_{(8)} - 2A_{(3)}\\
\times & A_{(10)} = A_{(5)} - 2A_{(2)}\\
 & A_{(11)} = A_{(10)} - A_{(6)}\\
 & A_{(12)} = A_{(10)} + A_{(3)}\\
 & A_{(13)} = A_{(9)} + A_{(12)}.
\end{array}$$

Шесть оставшихся строк

$$\left[\begin{array}{rrrrr|rrrrr}
\boxed{1} & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \boxed{2} & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
A_{(1)}\\
A_{(2)}\\
A_{(3)}\\
A_{(12)}\\
A_{(13)}\\
\frac{1}{2}A_{(11)}.
\end{array}$$

дают ступенчатый вид в его традиционной версии, так что они линейно независимы. Ввиду того, что

$$A_{(12)} = -A_{(9)} = A_{(1)} - A_{(2)} + 2A_{(3)} - A_{(4)},$$

отсюда следует линейная независимость $\mathbf{b}_1$ от $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$; следовательно, множество $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1\}$ является базисом $\mathcal{A} + \mathcal{B}$. В качестве базиса $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ получилось множество

$$\{[1,0,0,1,-1], [0,1,1,0,1]\}.$$

По таблице вычислений сразу не ясны выражения этих векторов через исходные, но можно проверить, что они равны соответственно

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 &= -\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3,\\ \mathbf{a}_2 &= \tfrac{1}{2}\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \tfrac{1}{2}\mathbf{b}_3. \end{aligned}$$

Теперь решим эту же задачу вторым способом. Найдём сперва линейные зависимости множества векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, для чего применим описанный выше экономичный метод, располагая векторы по столбцам.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2\\
-1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1\\
0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1\\
0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{cl}
\times & A_{(1)}\\
\times & A_{(2)}\\
\times & A_{(3)}\\
 & A_{(4)}\\
\times & A_{(5)}\\
\times & A_{(6)} = A_{(2)} - A_{(1)}\\
\times & A_{(7)} = A_{(5)} + A_{(1)}\\
 & A_{(8)} = A_{(7)} - A_{(3)}\\
 & A_{(9)} = A_{(1)} - A_{(8)}\\
 & A_{(10)} = A_{(9)} + A_{(7)}\\
\times & A_{(11)} = A_{(6)} + A_{(8)}\\
\times & A_{(12)} = A_{(11)} - A_{(3)}\\
 & A_{(13)} = A_{(12)} - A_{(8)}.
\end{array}$$

Выпишем оставшиеся ненулевые строки, помечая столбцы соответствующими исходными векторами:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3
\end{array}\\
\left[\begin{array}{rrr|rrr}
\boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\
0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 2\\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
A_{(9)}\\
A_{(10)}\\
A_{(4)}\\
A_{(8)}.
\end{array}$$

Из этой таблицы сразу видим, что $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1\}$ является базисом $\mathcal{A} + \mathcal{B}$. Также видим выражения оставшихся векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{b}_3 &= 2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_1. \end{aligned}$$

Поэтому базис $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ можно составить из векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 &= \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \\ 2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3 &= \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3. \end{aligned}$$

Ответ здесь отличается от полученного первым способом, но они и не должны совпадать, поскольку базис подпространства не определяется однозначно.

Продолжение следует…