Теория функций комплексного переменного

С. Г. Бугаева

Физический факультет
Новосибирский государственный университет

Эти слайды сопровождали лекции и содержат некоторые (далеко не все!!!) определения и утверждения из прочитанного курса ТФКП.

2009

Определение

1. Точка z_0 называется граничной точкой множества $E \subset \mathbb{C}$, если в любой окрестности $U(z_0)$ этой точки лежат как точки множества E, так и точки, не принадлежащие множеству E.
2. Граница ∂E множества E — это совокупность граничных точек множества E.
3. Компонента множества E — максимальное (по включению) связное подмножество множества E.
4. Порядок связности области — число компонент границы этой области.

Теорема (Римана)

Пусть $D, D^* \subset \mathbb{C}$ *— односвязные области, границы которых состоят более, чем из одной точки. Тогда существует конформное отображение области* D *на область* D^*.

Определение

Функция $u(x,y) \in C^2(D)$ называется *гармонической* в области $D \subset \mathbb{R}^2$, если $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ для всех $(x,y) \in D$.

Определение

Гармонические в области $D \subset \mathbb{R}^2$ функции u и v называются *сопряжёнными*, если они связаны условиями Коши — Римана.

Теорема

Функция f является аналитической в области $D \iff$ $u = \operatorname{Re} f$ и $v = \operatorname{Im} f$ – сопряжённые гармонические функции в D.

Теорема

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ *— односвязная область,* $u\colon D \to \mathbb{R}$ *— гармоническая функция. Тогда существует единственная с точностью до постоянного слагаемого сопряжённая к ней гармоническая функция* $v\colon D \to \mathbb{R}$.

Теорема (Пуанкаре)

В односвязной области замкнутая дифференциальная форма является точной.

Определение

1. Дифференциальная k-форма ω называется *замкнутой* в области D, если $d\omega = 0$ на D.
2. Дифференциальная k-форма ω называется *точной* в области D, если существует $(k-1)$-форма π такая, что $d\pi = \omega$ на D.

Свойства ДЛО:

1) консерватизм углов;

2) круговое свойство;

3) сохранение симметрии относительно окружности.

Теорема (консерватизм углов)

При ДЛО углы между гладкими кривыми сохраняются.

Определение

Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ — гладкие кривые такие, что их образы Γ_1, Γ_2 при стереографической проекции проходят через полюс P и имеют в нём касательные.

Углом между γ_1 и γ_2 в $z_0 = \infty$ называется угол между образами этих кривых при отображении $t(z) = 1/z$ в точке $t_0 = 0$.

Теорема (круговое свойство)

При ДЛО любая окружность или прямая на комплексной плоскости отображается на окружность или прямую.

Определение (1)

Точки z_1 и z_2 называются *симметричными* относительно окружности $\Gamma = \{|z - z_0| = R\}$, если z_1 и z_2 лежат на одном луче с началом в точке z_0 и $|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = R^2$.

Определение (2)

Точки z_1 и z_2 называются *симметричными* относительно окружности Γ, если любая окружность или прямая, проходящая через точки z_1 и z_2, ортогональна окружности Γ.

Предложение

Определения 1 и 2 равносильны.

Теорема (сохранение симметрии относительно окружности)

При ДЛО точки z_1 и z_2, симметричные относительно окружности (или прямой) Γ, переходят в точки w_1 и w_2, симметричные относительно образа Γ.

Пусть $f(z)$ — многозначная функция в области D, $[f]_z$ — множество всех значений f в точке $z \in D$.

Определение

$f(z)$ допускает выделение однозначной ветви в области D, если $\exists h(z)$ — однозначная аналитическая в D функция такая, что $h(z) \in [f]_z \; \forall z \in D$. В этом случае $h(z)$ называется ветвью многозначной функции $f(z)$.

Определение

$f(z)$ допускает выделение однозначной ветви в окрестности точки $z_0 \in D$, если она допускает выделение однозначной ветви в некоторой проколотой окрестности точки z_0 $\dot{U}(z_0) = U(z_0) \setminus \{z_0\}$. В этом случае z_0 называется точкой однозначного характера.

Определение

Если в $\forall$ окрестности точки найдётся замкнутый контур, при обходе которого происходит переход функции от одной ветви к другой, то такая точка называется точкой ветвления.

Если при n-кратном обходе в одном и том же направлении вокруг точки ветвления z_0 происходит возвращение на исходную ветвь, то z_0 называется точкой ветвления конечного порядка, а наименьшее из чисел n называется порядком ветвления.

Если при обходе в одном направлении вокруг точки ветвления z_0 не происходит возвращения на исходную ветвь, то z_0 называется точкой ветвления бесконечного порядка или логарифмической точкой ветвления.

Определение

Интегралом от функции $f(z)$ по ориентированной кривой γ называется величина

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz := \int\limits_{a}^{b} f(z(t))z'(t)\,dt.$$

Запомнить!

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=R}\frac{dz}{z-z_0}=1.$$

Свойства интеграла

- Аддитивность $\int\limits_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz.$
- Линейность $\int\limits_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z))\,dz = \alpha \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz + \beta \int\limits_{\gamma} g(z)\,dz$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- Зависимость от ориентации $\int\limits_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz.$
- Оценка интеграла $\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \le \int\limits_{\gamma} |f(z)|\,|dz| \le M \cdot L$, где $|dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = ds$ – элемент длины дуги кривой γ, $M = \max\limits_{z\in\gamma} |f(z)|$, L — длина кривой γ.

Свойства интеграла

- Аддитивность $\int\limits_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz.$
- Линейность
  $\int\limits_{\gamma}(\alpha f(z)+\beta g(z))\,dz = \alpha\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz + \beta\int\limits_{\gamma} g(z)\,dz$, где
  $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.
- Зависимость от ориентации $\int\limits_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz.$
- Оценка интеграла $\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \le \int\limits_{\gamma}|f(z)|\,|dz| \le M\cdot L$, где
  $|dz|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=ds$ – элемент длины дуги кривой γ,
  $M=\max\limits_{z\in\gamma}|f(z)|$, L — длина кривой γ.

Свойства интеграла

- Аддитивность $\int\limits_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz$.
- Линейность $\int\limits_{\gamma}(\alpha f(z)+\beta g(z))\,dz = \alpha\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz + \beta\int\limits_{\gamma} g(z)\,dz$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.
- Зависимость от ориентации $\int\limits_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$.
- Оценка интеграла $\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \le \int\limits_{\gamma} |f(z)|\,|dz| \le M\cdot L$, где $|dz|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=ds$ – элемент длины дуги кривой γ, $M=\max\limits_{z\in\gamma}|f(z)|$, L — длина кривой γ.

Свойства интеграла

- Аддитивность $\int\limits_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz.$
- Линейность
  $\int\limits_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z))\,dz = \alpha \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz + \beta \int\limits_{\gamma} g(z)\,dz$, где
  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- Зависимость от ориентации $\int\limits_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz.$
- Оценка интеграла $\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \leq \int\limits_{\gamma} |f(z)|\,|dz| \leq M \cdot L$, где
  $|dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = ds$ – элемент длины дуги кривой γ,
  $M = \max\limits_{z \in \gamma} |f(z)|$, L — длина кривой γ.

Свойства интеграла (продолжение)

- Почленное интегрирование функциональных рядов.

  Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$, состоящий из непрерывных на γ функций, сходится равномерно на γ к функции $f(z)$.

  Тогда $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\gamma} f_k(z)\,dz$.

Теорема

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, f — аналитическая в D функция. Тогда для каждого простого кусочно-гладкого замкнутого контура $\gamma \subset D$ верно

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Теорема (интегральная теорема Коши для односвязной области)

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная односвязная область, $\Gamma = \partial D$ — кусочно-гладкая граница, f — аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ функция. Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = 0.$$

Теорема (интегральная теорема Коши для конечносвязной области)

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ *— ограниченная конечносвязная область,* $\Gamma = \partial D$ *— ориентированная кусочно-гладкая граница,* f *— аналитическая в* D *и непрерывная в* $\overline{D} = D \cup \Gamma$ *функция. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Теорема

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная конечносвязная область, $\Gamma = \partial D$ — ориентированная в положительном направлении кусочно-гладкая граница, f — аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ функция. Тогда

$$\forall z \in D \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{t - z}.$$

Следствие

Если выполнены условия предыдущей теоремы, то верна интегральная формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(t)\,dt}{t-z}=\begin{cases} f(z), & z\in D,\\ 0, & z\in\mathbb{C}\setminus\overline{D}.\end{cases}$$

Теорема

Пусть $\gamma \subset \mathbb{C}$ — кусочно-гладкая кривая, $f : \gamma \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Тогда в $\mathbb{C} \setminus \gamma$ интеграл типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(t)\,dt}{t - z}$$

(1) является аналитической функцией;
(2) бесконечно дифференцируем и

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t - z)^{n+1}}.$$

Следствие (бесконечная дифференцируемость аналитической функции)

Пусть f — аналитическая в области $D \subset \mathbb{C}$ функция. Тогда f бесконечно дифференцируема в D.

Следствие (интегральные представления для производных)

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ *— ограниченная конечносвязная область,* $\Gamma = \partial D$ *— ориентированная в положительном направлении кусочно-гладкая граница,* f *— аналитическая в* D *и непрерывная в* $\overline{D} = D \cup \Gamma$ *функция. Тогда*

$$\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}} = \begin{cases} f^{(n)}(z), & z \in D, \\ 0, & z \in \mathbb{C}\setminus\overline{D}. \end{cases}$$

Теорема

Пусть f *— непрерывная в односвязной области* $D \subset \mathbb{C}$ *функция и для любых* $z_0, z \in D$ *интеграл* $\int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt$ *не зависит от пути интегрирования. Тогда* $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt$ *— аналитическая в* D *функция и* $F'(z) = f(z)$.

Определение

Аналитическая в области $D \subset \mathbb{C}$ функция $\Phi(z)$ называется первообразной для $f(z)$, если $\Phi'(z) = f(z)$

Теорема (Мореры)

Пусть f — непрерывная в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ функция и для каждого кусочно-гладкого замкнутого контура $\gamma \subset D$ верно $\int\limits_{\gamma} f(t)\,dt = 0$. Тогда f — аналитическая в D функция.

Теорема (о среднем)

Пусть f *— аналитическая в* $B(z_0;r)$ *и непрерывная в* $\overline{B(z_0;r)}$ *функция. Тогда* $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\varphi})\,d\varphi$.

Теорема (принцип максимума)

Пусть $f \not\equiv \mathrm{const}$ *— аналитическая в области* $D \subset \mathbb{C}$ *функция,* $M = \sup\limits_{z \in D} |f(z)|$*. Тогда* $|f(z)| < M$ *для* $z \in D$*.*

Следствие (1)

Пусть $f \not\equiv \mathrm{const}$ — *аналитическая в области* $D \subset \mathbb{C}$ *функция,* $f \neq 0$ в D, $m = \inf\limits_{z \in D} |f(z)|$. *Тогда* $|f(z)| > m$ *для* $z \in D$.

Следствие (2)

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ *— ограниченная область,* $f \not\equiv \mathrm{const}$ *— аналитическая в* D *и непрерывная в* $\overline{D}$ *функция. Тогда* $|f(z)|$ *достигает своего наибольшего значения только в точках границы* ∂D.

Следствие (3)

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ *— ограниченная область,* $f \not\equiv \mathrm{const}$ *— аналитическая в* D *и непрерывная в* $\overline{D}$ *функция,* $f \neq 0$ *в* D*, Тогда* $|f(z)|$ *достигает своего наименьшего значения только в точках границы* ∂D.

Теорема (первая теорема Вейерштрасса)

Пусть $f_k(z)$ *— аналитические в области* $D \subset \mathbb{C}$ *функции и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \qquad (1)$$

сходится равномерно на $\forall$ *компакте* $K \subset D$ *к функции* $f(z)$*. Тогда*

1) $f(z)$ *— аналитическая в* D*;*

2)

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z) \text{ в } D \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (2)$$

(ряд (1) *можно почленно дифференцировать).*

Теорема (вторая теорема Вейерштрасса)

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ *— ограниченная область,* $f_k(z)$ *— аналитические в* D *и непрерывные в* $\overline{D}$ *функции. Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ *сходится равномерно на* ∂D *к функции* $f(z)$*, то он сходится равномерно и в замкнутой области* $\overline{D}$*.*

Теорема (первая теорема Абеля)

1) Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *сходится в точке* $z_0 \neq 0$, *то он сходится абсолютно в круге* $B(0; |z_0|)$ *и равномерно в круге* $\overline{B(0; r)}$, $r < |z_0|$.

2) Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *расходится в точке* z_1, *то он расходится для* $\forall z$: $|z| > |z_1|$.

Теорема (вторая теорема Абеля)

Пусть $R \in (0;\infty)$ *— радиус сходимости ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, *сходящегося в точке* $z_0 = Re^{i\varphi_0}$. *Тогда сумма ряда* $S(z)$ *непрерывна вдоль радиуса в точке* z_0, *т. е.*
$\lim\limits_{r \to R-0} S(re^{i\varphi_0}) = S(Re^{i\varphi_0})$.

Теорема (Тейлора)

Пусть $f(z)$ — аналитическая в области $D \subset \mathbb{C}$ функция. Тогда для $\forall z_0 \in D$ $\exists$окрестность $U(z_0) \subset D$, в которой функция $f(z)$ представима, причём единственным образом, степенным рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad z \in U(z_0), \tag{3}$$

где $c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$,
$C_r = \{|t-z_0| = r\}$, $r \in (0; d)$, $d = \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$.
При этом радиус сходимости ряда $R \geq \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$.

Ряд (3) называется рядом Тейлора для функции $f(z)$ в точке $z_0 \in D$.

Теорема (единственности)

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область, $E \subset D$, E имеет хотя бы одну предельную точку $z_0 \in D$, $f(z), g(z)$ — аналитические в D функции и $f(z) = g(z)$ для $\forall z \in E$. Тогда $f(z) = g(z)$ для $\forall z \in D$.

Теорема (Лорана)

Пусть $f(z)$ — аналитическая в кольце $K = \{r < |z - z_0| < R\}$ функция, $0 \leq r < R \leq \infty$. Тогда в кольце K функция $f(z)$ представима, причём единственным образом, в виде ряда

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad z \in K, \tag{4}$$

где $c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{k+1}}$, $C_\rho = \{|t - z_0| = \rho\}$, $\rho \in (r; R)$.

Ряд (4) называется рядом Лорана для функции $f(z)$ в кольце K.

Теорема (Лиувилля)

Пусть $f(z)$ — аналитическая и ограниченная на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда $f(z) \equiv \mathrm{const}$ в $\mathbb{C}$.

Определение (1)

Функция $f(z)$, аналитическая на всей к. п. $\mathbb{C}$, называется *целой*.

Определение (2)

Функция $f(z)$, аналитическая на всей к. п. $\mathbb{C}$ за исключением полюсов, называется *мероморфной*.

Теорема (1)

Пусть f *— целая функция. Тогда справедливы утверждения*
(1) $z = \infty$ *— у. о. т. для* $f \iff f \equiv \mathrm{const}$;
(2) $z = \infty$ *— полюс порядка* m *для* $f \iff f$ *— многочлен степени* m.

Теорема (2)

Если f — мероморфная функция, то $z = \infty$ — у. о. т. или полюс для $f \iff f$ — рациональная функция, т. е. $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, где P_n, Q_m — многочлены соответствующих степеней.

Определение (1)

Вычетом аналитической функции f в и. о. т. $z_0 \in \mathbb{C}$ называется число $\operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho^+} f(z)\, dz$, где $C_\rho^+ = \{|z - z_0| = \rho\}$ — окружность достаточно малого радиуса, ориентированная в положительном направлении.

Утверждение

1) Если $z_0 \in \mathbb{C}$ *— у. о. т. для* f, *то* $\operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = 0$.

2) Если $z_0 \in \mathbb{C}$ *— полюс порядка* m *для* f, *то*

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].$$

3) Если $z_0 \in \mathbb{C}$ *— простой полюс для* f *и* $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, *где* φ, ψ *— аналитические функции в* z_0, $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, *то*

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Теорема (основная теорема теории вычетов)

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная, конечносвязная область с кусочно-гладкой границей, ориентированной в положительном направлении. Функция $f(z)$ непрерывна в $\overline{D}$ и аналитична в D за исключением конечного числа особых точек $z_1, \ldots, z_n \in D$. Тогда

$$\int_{\partial D} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f(z).$$

Определение (2)

$\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho^-} f(z)\,dz$, где $C_\rho^- = \{|z| = \rho\}$ — окружность достаточно большого радиуса, ориентированная в отрицательном направлении.

Теорема (о сумме вычетов во всех особых точках)

Пусть функция $f(z)$ *аналитична во всей к. п.* $\mathbb{C}$ *за исключением конечного числа особых точек* $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = 0.$$

Лемма (Жордана)

Пусть $a > 0$ *и выполнены условия:*

1) $f(z)$ *непрерывна в секторе* $S=\{R_0<|z|<\infty,\ \operatorname{Im} z\geq 0\}$;

2) $M(R)=\max\limits_{z\in C_R}|f(z)|\to 0$ *при* $R\to+\infty$, *где* $C_R=\{|z|=R,\ \operatorname{Im} z\geq 0\}$.

Тогда $\lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{C_R} f(z)e^{iaz}\,dz = 0.$

Лемма

Пусть точка $z_0 \in \mathbb{C}$ — *полюс 1-го порядка функции* $f(z)$. *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{C_\varepsilon} f(z)\, dz = \pi i \operatorname*{Res}_{z_0} f,$$

где $C_\varepsilon = \{|z - z_0| = \varepsilon,\ \alpha \leq \arg(z - z_0) \leq \alpha + \pi\}$ — *половина окружности* $|z - z_0| = \varepsilon$, *проходимая в положительном направлении.*

Теорема

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ *— ограниченная односвязная область,* ∂D *— кусочно-гладкая граница, ориентированная в положительном направлении,* $f(z)$ *— функция, аналитическая в* $\overline{D}$ *за исключением конечного числа полюсов* $b_1, \dots, b_m \in D$, *и* $f(z) \neq 0$ *при* $z \in \partial D$. *Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N - P,$$

где N *— количество нулей и* P *— количество полюсов функции* $f(z)$ *в области* D *с учетом их кратности и порядка.*

Теорема (принцип аргумента)

При выполнении условий предыдущей теоремы

$$\Delta_{\partial D}(\operatorname{Arg} f(z)) = 2\pi(N - P),$$

где $\Delta_{\partial D}(\operatorname{Arg} f(z))$ *— приращение аргумента функции* $f(z)$ *при однократном обходе границы* ∂D *в положительном направлении.*

Теорема (Руше)

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей, $f(z)$ и $g(z)$ — аналитические в $\overline{D}$ функции, $|f(z)| > |g(z)|$ при $z \in \partial D$. Тогда $f(z)$ и $f(z) + g(z)$ имеют в D одинаковое количество нулей с учетом их кратности.

Теорема (основная теорема алгебры)

Каждый многочлен степени n имеет на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ ровно n корней с учетом их кратности.

Теорема

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ *— область,* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *— промежуток,*
$f(z,t)\colon D \times \Delta \to \mathbb{C}$ *— функция такая, что*
1) $f(z,t)$ *— измеримая по* $t \in \Delta$ *для* $\forall z \in D$*;*
2) $f(z,t)$ *— аналитическая по* z *в области* D *для* $\forall t \in \Delta$*;*
3) $\exists$ *интегрируемая мажоранта* $\varphi(t)$*, т. е.* $|f(z,t)| \le \varphi(t)$ *для* $\forall z \in D$ *и* $\int\limits_{\Delta} \varphi(t)\,dt < \infty$*. Тогда функция* $F(z) = \int\limits_{\Delta} f(z,t)\,dt$ *аналитична в* D *и* $F'(z) = \int\limits_{\Delta} \frac{\partial f(z,t)}{\partial z}\,dt$*.*

Определение

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область, $E \subset D$. Аналитическая в D функция $F(z)$ называется *аналитическим продолжением* функции $f : E \to \mathbb{C}$ в область D, если $F(z) = f(z)$ для $\forall z \in E$.

Определение (1)

Локально интегрируемая функция $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ называется *оригиналом*, если существует число $a \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\int\limits_0^{+\infty} |f(t)| e^{-at}\,dt < \infty.$$

$a(f) = \inf a$ — *показатель роста* оригинала f.

Определение (2)

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция

$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$, определённая при $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > a(f)$.

Определение (3)

Преобразование Лапласа — это отображение, сопоставляющее оригиналу $f(t)$ его изображение $F(p)$. Обозначения:
$F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$, $f(t) \mathrel{\dot{=}} F(p)$, $F(p) \mathrel{=\!\!\cdot} f(t)$.

Теорема (об аналитичности изображения)

Пусть $f(t)$ *— оригинал. Тогда*

1) $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$ *абсолютно сходится*
для $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > a(f)$;
2) $F(p)$ *аналитична в полуплоскости* $\operatorname{Re} p > a(f)$;
3) $F(p) \to 0$ *при* $\operatorname{Re} p \to +\infty$.

Теорема (формула обращения)

Пусть $f(t)$ *— кусочно-гладкий оригинал,* $f(t) \risingdotseq F(p)$*. Если* $f(t)$ *непрерывна в точке* $t > 0$*, то*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt}\, dp,$$

где интегрирование ведётся вдоль прямой $\operatorname{Re} p = a > a(f)$.

Теорема (линейности)

Пусть $f(t)$ *и* $g(t)$ *— оригиналы,* $f(t) \doteqdot F(p)$. $g(t) \doteqdot G(p)$. $a, b \in \mathbb{C}$. *Тогда* $af(t) + bg(t)$ *— оригинал и* $af(t) + bg(t) \doteqdot aF(p) + bG(p)$.

Теорема (подобия)

Пусть $f(t)$ *— оригинал,* $f(t) \doteqdot F(p)$, $a > 0$. *Тогда* $f(at)$ *— оригинал и* $f(at) \doteqdot \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$.

Теорема (смещения)

Пусть $f(t)$ *— оригинал,* $f(t) \doteqdot F(p)$, $a \in \mathbb{C}$. *Тогда* $f(t)e^{-at}$ *— оригинал и* $f(t)e^{-at} \doteqdot F(p + a)$.

Теорема (о дифференцировании оригинала)

Пусть функция $f(t)$ непрерывна при $t \geq 0$ и дифференцируема при $t > 0$, $f'(t)$ — оригинал. Тогда $f(t)$ — оригинал и $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$, где $F(p) \fallingdotseq f(t)$.

Следствие

Пусть $f(t) \in C^n[0, +\infty)$, $f^{(n)}(t)$ — оригинал. Тогда $f^{(k)}(t)$, $0 \leq k < n$, — оригиналы и $f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$, где $F(p) \fallingdotseq f(t)$.

Теорема (об интегрировании оригинала)

Пусть $f(t)$ — оригинал, непрерывный при $t \geq 0$, $f(t) \risingdotseq F(p)$. Тогда $\int\limits_0^t f(s)\,ds \risingdotseq F(p)/p$.

Теорема (о дифференцировании изображения)

Пусть $f(t)$ *— оригинал,* $f(t) \risingdotseq F(p)$. *Тогда* $tf(t) \risingdotseq -F'(p)$.

Следствие

Пусть $f(t)$ *— оригинал,* $f(t) \risingdotseq F(p)$. *Тогда*
$F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-1)^n t^n f(t)$.

Теорема (об интегрировании изображения)

Пусть $\frac{f(t)}{t}$ *— оригинал. Тогда* $f(t)$ *— оригинал и*
$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{+\infty} F(q)\,dq$, *где* $F(p) \fallingdotseq f(t)$.

Пусть $f(t)$ — оригинал, $a > 0$. Обозначим

$$f_a(t) = \begin{cases} f(t-a), & \text{при } t \geq a, \\ 0, & \text{при } t < a. \end{cases}$$

Теорема (о запаздывании оригинала)

Пусть $f(t)$ — оригинал, $f(t) \doteq F(p)$, $a > 0$. Тогда $f_a(t)$ — оригинал и $f_a(t) \doteq e^{-pa}F(p)$.

Определение

Свёрткой оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ называется функция

$$(f*g)(t)=\int\limits_0^t f(s)g(t-s)\,ds,\ t\geq 0.$$

Теорема (Бореля)

Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — оригиналы, $f(t)\risingdotseq F(p)$, $g(t)\risingdotseq G(p)$. Тогда $(f*g)(t)$ — оригинал и $(f*g)(t)\risingdotseq F(p)G(p)$.

Теорема (формула Дюамеля)

Пусть $f(t)$ *— оригинал, непрерывный при* $t \geq 0$, $g(t)$ *— функция, непрерывно дифференцируемая при* $t \geq 0$, $g'(t)$ *— оригинал,* $f(t) \doteqdot F(p)$, $g(t) \doteqdot G(p)$. *Тогда* $\frac{d}{dt}(f * g)(t) \doteqdot pF(p)G(p)$.

Замечание

В условиях теоремы $\frac{d}{dt}(f * g)(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t f(s)g(t-s)\,ds =$

$$= \int\limits_0^t f(s)g'(t-s)\,ds + f(t)g(0) = (f * g')(t) + f(t)g(0).$$

Пусть ω — предельная точка множества $D \subset \mathbb{C}$.

Определение (1)

Последовательность функций $\varphi_k \colon D \to \mathbb{C}$ называется *асимптотической* при $z \to \omega$, если
$\forall k \in \mathbb{N} \quad \varphi_{k+1}(z) = o(\varphi_k(z))$ при $z \to \omega$, $z \in D$.

Определение (2)

Пусть $\{\varphi_k(z)\}$ — асимптотическая последовательность функций при $z \to \omega$. Формальный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(z)$, $c_k \in \mathbb{C}$, называется *асимптотическим разложением* (*асимптотическим рядом*) функции $f(z)$, если $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(z) + o(\varphi_n(z)) \quad \text{при } z \to \omega \tag{1}$$

или

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(z) + O(\varphi_{n+1}(z)) \quad \text{при } z \to \omega. \tag{2}$$

Обозначаем $f(z) \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(z)$ при $z \to \omega$.

Определение (3)

Пусть $\{\varphi_k(z)\}$ — асимптотическая последовательность функций при $z \to \omega$. Функция $h(z)$ называется *асимптотическим нулём* относительно последовательности $\{\varphi_k(z)\}$ при $z \to \omega$, если $\forall k \in \mathbb{N} \;\; h(z) = o(\varphi_k(z))$ при $z \to \omega$.

Теорема

Пусть $f(z)$ и $g(z)$ допускают асимптотическое разложение по асимптотической последовательности $\{\varphi_k(z)\}$ при $z \to \omega$. Для того, чтобы асимптотические ряды для функций $f(z)$ и $g(z)$ совпадали, необходимо и достаточно, чтобы функция $h(z) = f(z) - g(z)$ была асимптотическим нулём относительно последовательности $\{\varphi_k(z)\}$ при $z \to \omega$.

Следствие

1) *Пусть* $f(z)$ *допускает асимптотическое разложение по асимптотической последовательности* $\{\varphi_k(z)\}$ *при* $z \to \omega$. *Тогда асимптотический ряд для* $f(z)$ *относительно асимптотической последовательности* $\{\varphi_k(z)\}$ *при* $z \to \omega$ *определён однозначно.*
2) *Двум разным функциям может соответствовать один и тот же асимптотический ряд.*

Теорема (1)

Пусть $\{\varphi_k(z)\}$ *— асимптотическая последовательность функций при* $z \to \omega$, $f(z) \simeq \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(z)$ *и* $g(z) \simeq \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(z)$ *при* $z \to \omega$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. *Тогда*

$$(\alpha f + \beta g)(z) \simeq \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) \varphi_k(z) \text{ при } z \to \omega.$$

Теорема (2 об интегрировании действительных асимптотических разложений)

Пусть 1) *функции* $\varphi_k(x) > 0$ *непрерывны на* $(a;\omega)$ *и образуют асимптотическую последовательность при* $x \to \omega - 0$;

2) *функция* $f(x)$ *непрерывны на* $(a;\omega)$ *и* $f(x) \simeq \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ *при* $x \to \omega - 0$;

3) *интегралы* $\Phi_k(x) = \int\limits_x^{\omega} \varphi_k(t)\,dt$ *и* $F(x) = \int\limits_x^{\omega} f(t)\,dt$ *сходятся при* $x \in [a;\omega)$. *Тогда* $\Phi_k(x) > 0$ *образуют асимптотическую последовательность при* $x \to \omega - 0$ *и* $F(x) \simeq \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\Phi_k(x)$ *при* $x \to \omega - 0$.

Теорема (1)

Пусть $f(z) \simeq \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *и* $g(z) \simeq \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ *— степенные асимптотические разложения при* $z \to 0$*. Тогда*

1) $(\alpha f + \beta g)(z) \simeq \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) z^k$ *при* $z \to 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

2) $(f \cdot g)(z) \simeq \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *при* $z \to 0$, *где*
$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0$;

3) *если* $b_0 \neq 0$, *то* $(f/g)(z) \simeq \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ *при* $z \to 0$, *где коэффициенты* d_k *находят из соотношений* $a_0 = b_0 d_0$, $a_1 = b_0 d_1 + b_1 d_0, \ldots, a_k = b_0 d_k + b_1 d_{k-1} + \ldots + b_k d_0$.

Теорема (2)

Пусть $f\colon (0;a) \to \mathbb{R}$ *и*

$$f(x) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad \text{при } x \to +0. \tag{3}$$

Тогда 1) *если функция* $f(x)$ *непрерывна на интервале* $(0;a)$, *то* $\int\limits_0^x f(t)\,dt \simeq \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c_k x^{k+1}}{k+1}$ *при* $x \to +0$;
2) *если* $f \in C^1(0;a)$ *и её производная допускает асимптотическое разложение* $f'(x) \simeq \sum\limits_{k=0}^{\infty} c'_k x^k$ *при* $x \to +0$, *то это разложение можно получить почленным дифференцированием разложения* (3), *т. е.* $c'_k = (k+1)c_{k+1}$.

Интеграл Лапласа:

$$F(\lambda) = \int\limits_a^b f(x) e^{\lambda S(x)}\, dx, \tag{1}$$

где $f, S\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $\lambda \to +\infty$.

Лемма (1)

Пусть $\mu = \sup\limits_{x\in[a,b]} S(x)$ *и интеграл* (1) *сходится абсолютно при некотором* $\lambda = \lambda_0$. *Тогда интеграл* (1) *сходится абсолютно при всех* $\lambda > \lambda_0$, *и существует константа* $L > 0$ *такая, что*

$$|F(\lambda)| \leq \int\limits_a^b |f(x)| e^{\lambda S(x)}\, dx \leq L e^{\lambda\mu}.$$

Лемма (принцип локализации)

Пусть интеграл (1) *сходится абсолютно при некотором* $\lambda = \lambda_0$, *функции* $f(x)$ *и* $S(x)$ *непрерывны в точке* $x_0 \in [a, b]$, *являющейся единственной точкой строгого максимума функции* $S(x)$ *на отрезке* $[a, b]$, $f(x_0) \neq 0$. *Тогда для каждой сколь угодно малой окрестности* $U = U(x_0)$ *точки* x_0 *справедливо соотношение*

$$F(\lambda) = \int\limits_{U\cap[a,b]} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx\Big(1 + O(\lambda^{-\infty})\Big) \quad \text{при } \lambda \to +\infty,$$

где $O(\lambda^{-\infty})$ — *асимптотический нуль относительно асимптотической последовательности* λ^{-n}, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *при* $\lambda \to +\infty$.

Лемма (Морса)

Пусть $S \in C^{n+k}(U(x_0))$ *и* $S'(x_0) = S''(x_0) = \ldots = S^{(n-1)}(x_0) = 0$, $S^{(n)}(x_0) \neq 0$. *Тогда существуют окрестность* $I_x = I_x(x_0) \subset U(x_0)$ *точки* $x = x_0$, *окрестность* $I_y = I_y(0) \subset \mathbb{R}$ *точки* $y = 0$ *и диффеоморфизм* $\varphi\colon I_y \to I_x$, $\varphi \in C^k(I_y)$, *такие, что* $\varphi(0) = x_0$, $S(\varphi(y)) = S(x_0) + \alpha y^n$, $\alpha = \operatorname{sign} S^{(n)}(x_0)$, $\varphi'(0) = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{|S^{(n)}(x_0)|}}$.

Лемма (о редукции)

Пусть интеграл (1) *сходится абсолютно при некотором* $\lambda = \lambda_0$, $x_0 \in [a, b]$ *— единственная точка строгого максимума функции* $S(x)$ *на отрезке* $[a, b]$, $f(x_0) \neq 0$, *функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0, $S \in C^{n+1}(U(x_0))$ *и*
$S'(x_0) = S''(x_0) = \ldots = S^{(n-1)}(x_0) = 0$, $S^{(n)}(x_0) \neq 0$. *Тогда*

$$F(\lambda) = e^{\lambda S(x_0)} \int\limits_{I_y} f(\varphi(y))\varphi'(y) e^{-\lambda y^n}\, dy \Big(1 + O(\lambda^{-\infty})\Big)$$

при $\lambda \to +\infty$,

где $I_y = I_y(0) \subset \mathbb{R}$ *— окрестность точки* $y = 0$ *и* φ *— диффеоморфизм из леммы Морса.*

Лемма (Ватсона)

Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < d \leq \infty$, $f \in C[0, d]$ *и интеграл* $W(\lambda) = \int\limits_0^d x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha}\, dx$ *сходится абсолютно при некотором* $\lambda = \lambda_0$. *Тогда при* $\lambda \to +\infty$ *справедливы соотношения:*

1) *если* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + O(x^{n+1})$ *при* $x \to +0$, *то*

$$W(\lambda) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{n} a_k \Gamma\left(\frac{\beta+k}{\alpha}\right) \lambda^{-\frac{\beta+k}{\alpha}} + O(\lambda^{-\frac{\beta+n+1}{\alpha}});$$

2) *если* $f \in C^\infty(U(0))$, *то* $W(\lambda) \simeq \frac{1}{\alpha} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \Gamma\left(\frac{\beta+k}{\alpha}\right) \lambda^{-\frac{\beta+k}{\alpha}}$.

При этом асимптотический ряд можно почленно диференцировать по λ *любое количество раз.*

Теорема (о главном члене асимптотики интеграла Лапласа)

Пусть интеграл (1) *сходится абсолютно при некотором* $\lambda = \lambda_0$, $x_0 \in [a, b]$ *— единственная точка строгого максимума функции* $S(x)$ *на отрезке* $[a, b]$, $f(x_0) \neq 0$, *функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0, $f(x) = f(x_0) + O(x - x_0)$ *при* $x \to x_0$, $S \in C^k(U(x_0))$. *Тогда*

$1)$ *если* $x_0 = a$, $S'(a) \neq 0$ $(S'(a) < 0)$, $k = 2$, *то* $F(\lambda) = \frac{e^{\lambda S(x_0)}}{-\lambda S'(x_0)} f(x_0)(1 + O(\lambda^{-1}))$ *при* $\lambda \to +\infty$;

$2)$ *если* $x_0 \in (a, b)$, $S'(x_0) = 0$, $S''(x_0) \neq 0$, $(S''(x_0) < 0)$, $k = 3$, *то* $F(\lambda) = e^{\lambda S(x_0)} f(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(x_0)|}}(1 + O(\lambda^{-1/2}))$ *при* $\lambda \to +\infty$;

$3)$ *если* $x_0 = a$, $S'(a) = 0$, $S''(a) \neq 0$, $(S''(a) < 0)$, $k = 3$, *то* $F(\lambda) = \frac{1}{2} e^{\lambda S(x_0)} f(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(x_0)|}}(1 + O(\lambda^{-1/2}))$ *при* $\lambda \to +\infty$.

Интеграл Фурье:

$$F(\lambda) = \int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx, \qquad (1)$$

где $f\colon [a;b] \to \mathbb{C}$, $S\colon [a;b] \to \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $\lambda \to +\infty$.
$S(x)$ — фазовая функция.

Лемма (Римана — Лебега)

Пусть $f \in L_1(\alpha;\beta)$, $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$. *Тогда* $\int\limits_\alpha^\beta f(x)e^{i\lambda x}\,dx \to 0$ *при* $\lambda \to +\infty$.

Обозначим $L = -\frac{1}{S'(x)}\frac{d}{dx}$.

Теорема

Пусть $I = [a;b]$ *— конечный отрезок,* $f \in C^n(I)$, $S \in C^{n+1}(I)$, $S(x) \neq 0$ *при* $x \in I$. *Тогда при* $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} (i\lambda)^{-k-1} \left[e^{i\lambda S(x)} L^k \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) \right] \Bigg|_a^b + o(\lambda^n), \qquad (2)$$

где $L^0 = I$ *(тождественный оператор).*

Следствие (1)

Пусть $f, S \in C^\infty(I)$, $S(x) \neq 0$ *при* $x \in I$. *Тогда*
$F(\lambda) \simeq \sum\limits_{k=0}^{\infty} (i\lambda)^{-k-1} \left[e^{i\lambda S(x)} L^k \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) \right] \Big|_a^b$ *при* $\lambda \to +\infty$.

Следствие (2)

Пусть $f \in C^n[0; 2\pi]$, $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(2\pi)$, $0 \leq k \leq n$. *Тогда*
$c_m = \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{imx}\, dx = o(m^{-n})$ *при* $m \to +\infty$.

Лемма (Эрдейи)

Пусть $f \in C^\infty[0; d]$, $0 < d < \infty$, $\alpha > 0$. *Тогда*
$\Phi(\lambda) = \int\limits_0^d f(x) e^{i\alpha\lambda x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\lambda}} f(0) e^{i\pi/4} + O(\lambda^{-1})$ *при*
$\lambda \to +\infty$.

Теорема (о главном члене асимптотики интеграла Фурье)

Пусть $f, S \in C^\infty[a;b]$, $x_0 \in [a;b]$ *— единственная стационарная точка функции* $S(x)$ *на конечном отрезке* $[a;b]$, $S''(x_0) \neq 0$ $(x_0$ *— невырожденная стационарная точка*$)$. *Тогда*

1) *если* $x_0 \in (a, b)$, *то*
$F(\lambda) = f(x_0) e^{i\lambda S(x_0)} e^{\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} S''(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(x_0)|}} + O(\lambda^{-1})$ *при* $\lambda \to +\infty$;

2) *если* $x_0 = a$ *или* $x_0 = b$, *то*
$F(\lambda) = \frac{1}{2} f(x_0) e^{i\lambda S(x_0)} e^{\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} S''(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(x_0)|}} + O(\lambda^{-1})$ *при* $\lambda \to +\infty$.