

Теория функций комплексного переменного (2009/10 ФФ НГУ)

Лектор: ст.преп., к.ф.-м.н. С.Г.Бугаева

Вопросы к экзамену

- 1. Комплексная плоскость.** Комплексные числа. Действительная и мнимая часть, модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Операции над комплексными числами. Предел последовательности комплексных чисел. Открытые, замкнутые, ограниченные и компактные множества на комплексной плоскости. Сфера Римана. Стереографическая проекция и её свойства. Бесконечно удалённая точка. Расширенная комплексная плоскость.
- 2. Аналитические функции комплексного переменного.** Предел и непрерывность функции комплексного переменного. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши — Римана. Аналитические функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения. Теорема об обратной функции. Сопряженные гармонические функции. Гармоничность действительной и мнимой частей аналитической функции. Существование для заданной гармонической функции сопряженной к ней.
- 3. Элементарные аналитические функции.** Линейные и дробно-линейные функции. Конформность дробно-линейных отображений. Инвариантность аргумента при дробно-линейных отображениях. Круговое свойство для дробно-линейных отображений. Симметрия относительно окружности. Отображение верхней полуплоскости на единичный круг. Степенная функция и обратная к ней. Риманова поверхность, ветви функций и точки ветвления $\sqrt[n]{w}$. Экспонента и обратная к ней функция. Риманова поверхность, ветви функций и точки ветвления $\operatorname{Ln} w$. Функция Жуковского. Риманова поверхность, ветви функций и точки ветвления функции Жуковского. Гиперболические и тригонометрические функции.
- 4. Интегрирование функций комплексного переменного.** Интеграл функции комплексного переменного по ориентированной кривой. Общие свойства интеграла функции комплексного переменного по ориентированной кривой, связь с криволинейными интегралами. Интегральные теоремы Коши для односвязной и конечносвязной области. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши, интегральные представления для производных, бесконечная дифференцируемость аналитической функции. Первообразная аналитической функции. Формула Ньютона — Лейбница. Теорема Мореры. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля аналитической функции.
- 5. Ряды аналитических функций.** Функциональные ряды в комплексной области. Теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций. Степенные ряды: первая теорема Абеля (без доказательства), круг и радиус сходимости, аналитичность суммы степенного ряда. Вторая теорема Абеля (без доказательства). Ряд Тейлора. Теорема Тейлора. Внутренняя теорема единственности. Теорема о разложении аналитической в кольце функции в ряд Лорана. Главная и правильная части ряда Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана. Теорема Лиувилля. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Теоремы о строении ряда Лорана в окрестности устранимой особой точки, полюса и существенно особой точки. Нули аналитической функции. Бесконечно удалённая особая точка. Поведение функции в окрестности изолированной существенно особой точки: теоремы Пикара и Сохоцкого (без доказательства). Целые и мероморфные функции. Классификация целых и мероморфных функций в зависимости от их поведения в окрестности бесконечно удаленной точки.
- 6. Элементы теории вычетов.** Вычет в конечной особой точке. Формулы для нахождения вычета в полюсе. Основная теорема теории вычетов. Вычет в бесконечно удалённой точке. Теорема о сумме вычетов. Интегрирование рационально-тригонометрических функций. Интегрирование рациональных функций. Преобразование Фурье рациональной функции. Лемма Жордана. Интегрирование рациональных выражений со степенным «весом». Вычисление интегралов с логарифмическими особенностями. Вычисление интегралов в смысле главного значения (без вывода формул). Принцип аргумента. Теорема Руше. Доказательство «основной теоремы алгебры». Аналитическая зависимость интеграла от параметра.
- 7. Преобразование Лапласа.** Оригиналы и изображения. Аналитичность изображения. Формула обращения. Свойства преобразования Лапласа: линейность, теорема подобия, смещение изображения. Преобразование Лапласа производных и интегралов. Дифференцирование и интегрирование изображений. Запаздывание оригинала. Свёртка оригиналов. Теорема Бореля об умножении изображений. Формула Дюамеля.
- 8. Асимптотические методы.** Асимптотические сравнения. Асимптотические последовательности и ряды. Асимптотический нуль. Единственность асимптотического разложения. Арифметические операции с асимптотическими разложениями. Интегрирование действительных асимптотических разложений. Степенные асимптотические разложения и их свойства. Интегрирование и дифференцирование действительных степенных асимптотических разложений.
- 9. Метод Лапласа.** Интегралы Лапласа. Принцип локализации (без доказательства). Лемма Морса. Лемма о редукции. Лемма Ватсона. Нахождение главного члена асимптотики интеграла Лапласа в типичных случаях. Асимптотика гамма-функции. Формула Стирлинга.
- 10. Метод стационарной фазы.** Интегралы Фурье. Асимптотика интеграла Фурье с фазовой функцией без стационарных точек. Лемма Эрдейи. Нахождение главного члена асимптотики интеграла Фурье с фазовой функцией с невырожденной стационарной точкой.