Задания по линейной алгебре и геометрии

Лектор — Александр Петрович Ульянов

Решения части формулируемых ниже задач состоят в основном из стандартных вычислений; эти задачи являются лишь образцами, по которым преподаватели выдадут студентам индивидуальные задания. Задачи, помеченные звёздочкой, не являются обязательными для получения допуска на экзамен, однако баллы приносят.

Задание 5 (сдать к 21 марта)

1. Найти базисы ядра и образа отображения, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 0)^\top, \qquad \mathbf{a}_2 = (0, 1, -1)^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = (-1, 1, 3)^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = (2, 3, 1)^\top, \qquad \mathbf{b}_2 = (2, 1, -3)^\top, \qquad \mathbf{b}_3 = (-2, 6, 8)^\top.$$

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = (2, 3, 5)^\top, \qquad \mathbf{a}_2 = (0, 1, 2)^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = (1, 0, 0)^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1)^\top, \qquad \mathbf{b}_2 = (1, 1, -1)^\top, \qquad \mathbf{b}_3 = (2, 1, 2)^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

4. В пространстве $\mathbb{R}^4$ дана линейная оболочка $\mathcal{L}$ трёх столбцов

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, 4)^\top, \quad \mathbf{a}_2 = (3, 4, 5, 6)^\top, \quad \mathbf{a}_3 = (5, 6, 7, 8)^\top.$$

Найти такое подпространство $\mathcal{M}$, что $\mathbb{R}^4 = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$.

5. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства всех симметрических, кососимметрических и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$. Доказать, что $\mathcal{A} \oplus \mathcal{L} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{S}$.

6. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle (1,0,0,1)^\top, (0,1,2,-1)^\top, (2,-1,-1,0)^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle (1,0,1,0)^\top, (0,1,-1,3)^\top, (4,-1,-1,1)^\top \right\rangle.$$

7*. На пространстве $M_n(\mathbb{C})$ квадратных комплексных матриц определён линейный оператор эрмитова сопряжения h правилом $h(A) = A^\dagger$, где $A^\dagger = \bar{A}^\top$. Найти собственные числа, векторы и подпространства для оператора h.
Указание: Разберите случай $M_n(\mathbb{R})$ с оператором $h(A) = A^\top$. Найдите подвох в комплексном случае.

8. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 7 & 5 & 9 \\ -5 & 0 & -4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ -5 & -9 & -7 \end{bmatrix}.$$

9*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — пространство многочленов степени не более n.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$. Доказать, что он нильпотентен, и представить его матрицей в какой-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

10*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{e^x, e^{2x}, \ldots, e^{nx}\}$;

(b) $\{\sin k_1 x, \sin k_2 x, \ldots, \sin k_n x\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 6 (сдать к 25 апреля)

1. Привести к жордановой форме матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -5 \\ -1 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Выписать все 2-мерные инвариантные подпространства для оператора, заданного в некотором базисе каждой из этих матриц.

2. Найти жорданову форму матрицы A и выяснить геометрический смысл представленного ей линейного оператора, если: (a) $A^2 = E$; (b) $A^2 = A$.

3. Найти $\exp(A\pi)$ для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Дополнить список векторов

$$\{(1,2,-1,1)^\top, (2,-2,-1,1)^\top\}$$

до ортогонального базиса эвклидова пространства $\mathbb{R}^4$.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $(4,-3,-1,4)^\top$ на линейную оболочку $\big\langle (1,1,1,1)^\top, (1,2,2,-1)^\top, (1,0,0,3)^\top \big\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от вектора $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \operatorname{tr}(A^\dagger B).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. В обычном трёхмерном пространстве выбран вектор $\mathbf{a}$. Оператор A сопоставляет каждому вектору $\mathbf{x}$ векторное произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{x}$. Найти сопряжённый оператор A^*.

9*. Матрица A есть жорданова клетка размера n с корнем λ. Найти жорданову форму матрицы A^2.

10*. (a) Доказать, что определитель Грама обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)\leqslant g(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)\,g(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)\,g(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бо́льших количеств векторов?

Задание 7 (сдать к 23 мая)

1. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t\in\mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

2. На эрмитовом пространстве дан такой нормальный оператор A, что $\mathsf{A}^2=-\mathsf{E}$. Доказать, что $\mathsf{A}^*=-\mathsf{A}$.

3. Два оператора заданы матрицами в стандартном ОНБ:

$$A=\begin{bmatrix}2&2&-4\\2&5&2\\-4&2&2\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}-1&-4&2\\-4&-1&2\\2&2&2\end{bmatrix}.$$

Найти ОНБ, в котором матрицы обоих операторов диагональны.

4. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 \\ -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

5. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 2-i & -1+2i \\ 2+i & -1-2i \end{bmatrix}$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

6. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

7. Найти невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее пару форм f и g к диагональному виду:

$$f = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3;$$
$$g = x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3.$$

8*. Доказать, что для каждой положительной эрмитовой матрицы A найдётся такая матрица B, что $A = B^\dagger B$.

9*. Доказать, что линейный оператор A на эвклидовом или эрмитовом пространстве $\mathcal{V}$ нормален тогда и только тогда, когда $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\| = \|\mathsf{A}^*\mathbf{x}\|$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$.

10*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа A лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(\mathsf{A}) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(\mathsf{A})\}.$$