Вопросы к устному экзамену
по линейной алгебре и геометрии

ФФ НГУ, июнь 2010

Лектор — Александр Петрович Ульянов

1. Линейные отображения пространств столбцов. Задание линейного отображения матрицей.

2. Образ и прообраз подпространства при линейном отображении. Образ и ядро линейного отображения, теорема об их размерностях. Связь с пространством столбцов матрицы и пространством решений системы линейных уравнений.

3. Композиция линейных отображений. Ассоциативность умножения матриц. Теорема о ранге произведения матриц.

4. Абстрактное линейное пространство. Выбор базиса как изоморфизм с координатным пространством.

5. Матрица линейного отображения в базисах. Смена базиса, матрица перехода. Изменение матрицы отображения при смене базисов.

6. Представление элементарных преобразований строк и столбцов матрицы в виде умножения её на элементарные матрицы. Приведение матрицы линейного отображения к простейшему виду.

7. Подпространства линейного пространства, их пересечение и сумма. Формула размерностей Грассмана. Дополнение к подпространству.

8. Пространство линейных отображений одного линейного пространства в другое. Пространство линейных операторов на линейном пространстве. Образ и ядро оператора, ранг и дефект оператора.

9. Примеры простейших операторов: нулевой, тождественный, масштабирование, проектирование, дифференцирование. Нильпотентность и идемпотентность. Разложение тождественного оператора в сумму ортогональных идемпотентов.

10. Подпространства, инвариантные под действием линейного оператора, их значение для изучения строения операторов. Связь разложения пространства в прямую сумму инвариантных подпространств и представления оператора блочно-диагональной матрицей. Понятие диагонализируемого оператора. Примеры недиагонализируемых операторов.

11. Подобие матриц. Характеристический многочлен матрицы. Характеристический многочлен линейного оператора. Теорема Гамильтона — Кэли (без доказательства).

12. Собственные векторы и собственные числа линейного оператора. Собственные числа и корни характеристического многочлена. Собственные и корневые подпространства. Геометрическая и алгебраическая кратности корня. Спектр оператора.

13. Прямота суммы собственных подпространств.

14. Критерий диагонализируемости оператора.

15. Теоремы о строении линейного оператора (без доказательств): ядерно-образное разложение, корневое сужение, прямота суммы корневых подпространств, корневое разложение.

16. Ниль-цепи и жордановы таблицы (без доказательств). Жордановы базисы, жордановы клетки, жорданова форма матрицы (без доказательств).

17. Функции от матриц. Матричная экспонента.

18. Ортонормированные базисы пространства столбцов $\mathbb{R}^n$ и ортогональные матрицы. Строение маломерных ортогональных матриц.

19. Диагонализация симметричных матриц (доказательство только в размерностях 2 и 3).

20. Ортогональная проекция одного вектора на другой. Метод ортогонализации Грама — Шмидта. Следствие о QR-разложении невырожденной матрицы.

21. Теорема Пифагора, равенство Парсеваля, неравенство Бесселя.

22. Ортогональное дополнение к подпространству.

23. Эрмитово сопряжение комплексной матрицы. Стандартное эрмитово пространство $\mathbb{C}^n$, его ортонормированные базисы и унитарные матрицы.

24. Теорема Шура об унитарной триангуляции комплексной матрицы.

25. Спектральная теорема для эрмитовых, косоэрмитовых и унитарных матриц.

26. Аксиомы общего скалярного произведения на вещественном или комплексном пространстве. Матрица Грама базиса. Изменение матрицы Грама при смене базиса. Связь аксиом скалярного произведения и свойств матриц Грама.

27. Неравенство Коши. Неравенство треугольника. Углы между векторами эвклидова или эрмитова пространства.

28. Объём параллелепипеда в эвклидовом или эрмитовом пространстве. Расстояние от точки до подпространства в эвклидовом или эрмитовом пространстве.

29. Сопряжённый оператор линейного оператора на эрмитовом пространстве. Матрица сопряжённого оператора в произвольном базисе. Спектр сопряжённого оператора. Подпространства, инвариантные под действием сопряжённого оператора.

30. Самосопряжённые, кососамосопряжённые, изометричные операторы. Нормальные операторы. Спектральная теорема для нормальных операторов. Спектральный портрет оператора.

31. Теорема о вещественном каноническом виде ортогонального и кососимметричного оператора.

32. Теорема об одновременной диагонализации семейства коммутирующих самосопряжённых операторов.

33. Эрмитово разложение оператора. Алгебраические структуры на эрмитовых, косоэрмитовых, унитарных операторах.

34. Левое и правое полярные разложения оператора. Доказательство существования полярных разложений невырожденного оператора. Формула для полярных разложений через сингулярное разложение.

35. Сингулярные числа линейного оператора или отображения, сингулярные числа матрицы. Сингулярное разложение матрицы. Простейший вид матрицы отображения в ортонормированных базисах.

36. Спектральное разложение нормального оператора. Функции от операторов (без доказательств).

37. Векторы и ковекторы (функционалы). Пространство ковекторов. Дуальный (биортогональный) базис в пространстве ковекторов. Различие законов преобразования координат векторов и ковекторов. Индексная запись и правило суммирования Эйнштейна.

38. Понятие тензора. Геометрическая суть объекта, представление массивом координат относительно базиса. Простейшие типы тензоров: скаляры, векторы, ковекторы, билинейные формы, линейные операторы; законы преобразования их координат при смене базиса. Тип тензора и общий закон преобразования координат тензора данного типа.

39. Операции с тензорами: сложение, умножение, свёртка. Метрический тензор эвклидова пространства. Поднятие и опускание индексов тензора на эвклидовом пространстве. Симметрия тензоров. Симметризация и альтернирование. Тензор Леви-Чивиты.

40. Понятие группы. Простейшие примеры групп: группы перестановок, группы симметрий геометрических фигур, различные группы движений пространства.

41. Классические матричные группы. Группа Лоренца.

42. Группа $\mathbf{SU}_2$ и алгебра кватернионов. Сопряжение, норма, обращение кватерниона. Связь умножения чисто мнимых кватернионов с векторным и скалярным произведениями. Представление вращений трёхмерного пространства с помощью кватернионов.