

Задания по основам математического анализа

Лектор — Александр Петрович Ульянов

Задание 7 (сдать к 27 марта)

1. В единичном круге наугад выбрана точка. Найти вероятность, что она окажется внутри цветочка, ограниченного линией $\rho = |\cos 3\varphi|$.
2. Найти момент инерции относительно оси Oy однородной пластины единичной плотности, ограниченной линиями

$$xy = 1/2, \quad xy = 2, \quad y = x/2, \quad y = 2x.$$

3. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_T \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz$$

по всей области определения подынтегральной функции.

4. Пара длинных круговых цилиндров диаметра 1 касаются вдоль образующих, проходящих через центр единичного шара. Найти объём части шара, находящейся снаружи цилиндров.
5. Вычислить моменты инерции относительно координатных осей однородного тела единичной плотности, ограниченного поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = z$.
6. Вывести формулу

$$\iiint_T x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} dx dy dz = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c+1)},$$

где T есть симплекс

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x + y + z \leq 1.$$

7. Найти объём n -мерного конуса

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq x_n^2, \quad 0 \leq x_n \leq 1.$$

8. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x) dx,$$

применяя дифференцирование по параметру.

9. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx,$$

представив подынтегральную функцию в виде интеграла.

10. Исследовать сходимость двойного несобственного интеграла

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \sin(x^2 + y^2) dx dy.$$

11. Исследовать сходимость двойного несобственного интеграла

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{(x+y)^p}.$$

12. Исследовать сходимость тройного несобственного интеграла

$$\iiint_D \frac{dx dy dz}{|x|^a + |y|^b + |z|^c},$$

где D есть дополнение к единичному шару с центром в начале координат. *Указание:* обобщённая сферическая замена; однако проще первой заменой привести знаменатель к $u^2 + v^2 + w^2$, затем детали второй, сферической замены окажутся несущественны.