Вопросы к экзамену по «Основам функционального анализа»

Глава 4. Геометрия гильбертовых пространств
(продолжение из предыдущего семестра)

4.8. Полнота ортонормированной системы. Равенство Парсеваля. Замкнутые системы. Гильбертов базис. Теорема о существовании гильбертова базиса (без доказательства).
4.9. Теорема Рисса – Фишера. Изоморфизм гильбертовых пространств: определение и теорема.
4.10. Критерий полноты ортонормированной системы. Тригонометрическая система как пример полной ортонормированной системы в $L_2[-\pi;\pi]$.

Глава 5. Ортогональные многочлены.

5.1. Ортогональные многочлены как результат ортогонализации последовательности мономов: определение весовой функции h, весового пространства Лебега $L_2^h[a,b]$ со скалярным произведением, и применение процесса ортогонализации.
5.2. Простейшие общие свойства ортогональных многочленов (все свойства – с доказательствами).
5.3. Свойства нулей ортогональных многочленов (перемежаемость нулей – без доказательства).
5.4. Классические ортогональные многочлены: определение семи классических ортогональных многочленов, способы стандартизации, определение производящей функции, уравнение Пирсона, свойства классических ортогональных многочленов (без доказательства).
5.5. Многочлены Лежандра: производящая функция и рекуррентные соотношения.
5.6. Многочлены Лежандра: дифференциальное уравнение и соотношения ортогональности.
5.7. Многочлены Лежандра: формула Родрига (без доказательства) и теорема о разложении функции по многочленам Лежандра (без доказательства).
5.8. Мультипольное разложение кулонова потенциала. Дипольный и квадрупольный моменты системы зарядов.

Глава 6. Ограниченные операторы в гильбертовом пространстве.

6.1. Линейные операторы в гильбертовом пространстве: определение, примеры и простейшие свойства. Матрица конечномерного линейного оператора.
6.2. Непрерывные и ограниченные операторы: определения и теорема о связи этих понятий.
6.3. Норма оператора: определение и теорема о свойствах нормы. Пример оценивания нормы конечномерного оператора.
6.4. Сходимость операторов и операторные ряды: определение и свойства предела последовательности операторов, определение фундаментальной последовательности операторов, теорема о полноте пространства операторов (без доказательства), определение и свойства операторного ряда.
6.5. Обратимость оператора. Обратный оператор. Свойства обратного оператора.
6.6. Теорема Неймана.

6.7. Спектр оператора: определение и простейшие свойства. Теорема Банаха об обратном операторе (без доказательства).
6.8. Линейные функционалы: определение функционала, определение ядра функционала, свойства ядра функционала.
6.9. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса.
6.10. Бра- и кет-векторы: определения, пример разложения тождественного оператора (правило сокращения) и пример нахождения резольвенты с помощью бра- и кет-обозначений.
6.11. Оператор, сопряжённый к ограниченному: определение и простейшие свойства.
6.12. Теорема о применении сопряжённого оператора к нахождению спектра оператора.
6.13. Свойства самосопряжённых операторов: теорема о точечном спектре самосопряжённого оператора, теорема о норме самосопряжённого оператора (без доказательства), теорема об инвариантном подпространстве самосопряжённого оператора.
6.14. Компактные операторы: определение и простейшие свойства. Пример компактного оператора с бесконечномерным образом. Теорема о дискретности точечного спектра компактного оператора (без доказательства) и её следствия.
6.15. Компактные самосопряжённые операторы: теорема о непустоте точечного спектра (без доказательства), теорема Гильберта – Шмидта (без доказательства) и вариационный принцип Куранта (без доказательства). Вывод формулы о возмущении точечного спектра самосопряжённого оператора.

Глава 7. Интегральные уравнения.

7.1. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра и примеры задач, к ним приводящих.
7.2. Интегральный оператор Гильберта – Шмидта: определение и теорема о компактности такого оператора (только идея доказательства) и теорема об операторе, сопряжённом оператору Гильберта – Шмидта.
7.3. Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром.
7.4. Альтернатива Фредгольма (доказательство только для операторов Гильберта – Шмидта с вырожденным ядром.
7.5. Интегральные уравнения с малым параметром. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений. Определение повторного ядра и теорема о повторном ядре. Резольвентное ядро.
7.6. Интегральные уравнения с симметричным ядром: определенеие симметричного ядра и функции, представимой через ядро, теорема Гильберта – Шмидта для интегральных операторов (без доказательства). Разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра.

Составил В.А. Александров
7 июня 2010 г.