Математический анализ

Лектор — Владимир Вениаминович Иванов

2 семестр

Глава 1. Системы гладких функций

1. Гладкие отображения арифметических пространств

Дифференцируемость отображения, матрица Якоби. Умножение матриц Якоби при суперпозиции отображений. Диффеоморфизмы. Матрица Якоби обратного отображения. Преобразование гладких линий и касательных к ним. Якобиан системы функций, или функциональный определитель. Умножение и обращение якобианов. Двумерные и трехмерные якобианы как локальные коэффициенты искажения площади и объема.

2. Теория неявных функций

Нелинейное уравнение с двумя неизвестными и плоские гладкие линии. Нелинейное уравнение с тремя неизвестными и гладкие поверхности в трехмерном пространстве. Система двух нелинейных уравнений с тремя неизвестными и пространственные гладкие линии. Общая теорема о системе неявных функций. Вычисление производных и дифференциалов неявно заданных функций.

3. Преобразование дифференциальных выражений

Теорема об обратном отображении. Пример, подчеркивающий локальный характер теоремы. Замена переменных в дифференциальных выражениях, содержащих: обыкновенные производные, частные производные. Случаи явного выражения новых переменных через старые, старых — через новые, неявные соотношения между переменными.

4. Гладкие многообразия

График гладкого отображения как простейшее многообразие. Параметрический способ описания гладкого многообразия. Задание многообразия невырожденной системой нелинейных уравнений. Касательные векторы как скорости движений по многообразию. Описание касательных векторов для разных способов задания многообразия. Касательное пространство, его размерность.

5. Условный экстремум

Постановка вопроса об экстремуме функции на многообразии, или условном экстремуме. Принципиальное сведение его к задаче о локальном экстремуме функции меньшего числа переменных. Условно стационарные точки и необходимое условие экстремума. Поиск и исследование условно стационарных точек методом исключения дифференциалов. Метод множителей Лагранжа.

Глава 2. Интегрирование функций нескольких переменных

6. Двойные интегралы

Квадрируемые фигуры и их площади. Интегральные суммы Римана функции двух переменных. Интегрируемые функции и двойной интеграл. Признаки интегрируемости. Основные свойства двойного интеграла: линейность, аддитивность, монотонность. Сведение двойного интеграла к повторному. Замена переменных в двойном интеграле. Пример: полярные координаты. Геометрические и механические приложения двойных интегралов.

7. Тройные интегралы

Кубируемые тела и их объемы. Интегральные суммы Римана функции трех переменных. Интегрируемые функции и тройной интеграл. Признаки интегрируемости. Основные свойства тройного интеграла. Сведение тройного интеграла к повторному: одномерные и двумерные сечения. Замена переменных в тройном интеграле. Примеры: цилиндрические и сферические координаты. Геометрические и механические приложения тройных интегралов.

8. Обзор теории Лебега

Измеримые множества и мера Лебега. Измеримые функции и интеграл Лебега. Сравнение с интегралом Римана. Линейность, аддитивность и монотонность интеграла. Пренебрежимые множества и термин «почти всюду». Принцип Кавальери, или восстановление меры множества по сечениям. Теорема Фубини — Тонелли о повторных интегралах. Пример Остроградского. Якобиан как локальный коэффициент искажения меры. Теорема о замене переменных в интеграле Лебега.

9. Вычисление многомерных интегралов

Многомерные геометрические образы: параллелепипеды, пирамиды, симплексы, конусы. Линейные замены переменных в кратных интегралах. Пример: обобщенный интеграл Эйлера — Пуассона. Интегрирование по слоям. Интегрирование сферически симметричных функций. Объем шара и площадь сферы в многомерном пространстве. Условия интегрируемости многомерных степенных особенностей.

10. Зависимость интеграла от параметра

Интеграл как средство построения новых функций. Теоремы Лебега о монотонной и мажорированной сходимости. Предельный переход в интеграле, зависящем от параметра. Непрерывная зависимость интеграла от параметра. Дифференцирование и интегрирование по параметру. Граничные значения интеграла Лапласа, формулы для его производных. Пример: вычисление интеграла Дирихле.

Глава 3. Интегрирование дифференциальных форм

11. Дифференциальные формы

Дифференциальные формы первой степени. Пример: форма работы. Общий вид дифференциальных 1-форм. Дифференциальные формы второй степени. Пример: форма потока. Общий вид дифференциальных 2-форм. Формы произвольной степени. Внешнее умножение дифференциальных форм. Внешнее дифференцирование. Замена переменных в дифференциальных формах.

12. Криволинейные интегралы

Интегрирование функций вдоль линий, или криволинейные интегралы 1-го рода: определение интеграла, его основные свойства, способы вычисления, примеры приложений. Направление гладкой линии, его задание непрерывным семейством единичных касательных. Интегрирование дифференциальных форм первой степени, или криволинейные интегралы 2-го рода: определение интеграла, его основные свойства, способы вычисления, его физический смысл и приложения, связь с интегралом 1-го рода.

13. Поверхностные интегралы

Площадь поверхности. Интегрирование функций вдоль поверхностей, или поверхностные интегралы 1-го рода: определение интеграла, его основные свойства, способы вычисления, примеры приложений. Сторона гладкой поверхности, ее задание непрерывным семейством единичных нормалей. Интегрирование дифференциальных форм второй степени, или поверхностные интегралы 2-го рода: определение интеграла, его основные свойства, способы вычисления, его физический смысл и приложения, связь с интегралом 1-го рода.

14. Классические интегральные формулы

Начало и конец направленной кривой. Распространение понятия интеграла от 1-формы на кусочно-гладкие линии. Формула Ньютона — Лейбница для криволинейных интегралов. Случай замкнутого контура. Положительный обход границы плоской области. Формула Грина. Согласование стороны поверхности и направления обхода ее границы. Распространение понятия интеграла от 2-формы на кусочно-гладкие поверхности. Формула Стокса. Внешняя сторона поверхности, ограничивающей пространственную область. Формула Остроградского.

15. Точные и замкнутые формы

Точные 1-формы на плоскости и в пространстве и независимость интеграла от пути. Замкнутые 1-формы на плоскости и в пространстве, их характерные свойства. Примеры: приращение угла, вихревые шнуры. Точные и замкнутые 2-формы от трех переменных, их характерные свойства. Топология области и связь между точными и замкнутыми формами. Прямая и обратная теоремы Пуанкаре.

Глава 4. Основы векторного анализа

16. Градиент. Ротор. Дивергенция

Скалярные и векторные поля. Градиент скалярного поля, его геометрическая характеристика, формальные свойства. Формула Ньютона — Лейбница в векторной записи. Ротор векторного поля, его гидромеханический смысл, формальные свойства. Формула Стокса в векторной записи. Дивергенция векторного поля, ее физическая интерпретация, формальные свойства. Формула Остроградского в векторной записи. Символический оператор Гамильтона. Оператор Лапласа.

17. Ортогональные криволинейные координаты

Координатные линии. Ортогональность криволинейной системы координат. Параметры Ламе и измерения в ортогональных криволинейных координатах. Представление скалярных и векторных полей, вычисление циркуляции и потока в криволинейных координатах. Выражение градиента, ротора, дивергенции и оператора Лапласа в криволинейных координатах. Формулы для декартовых, цилиндрических и сферических координат.

18. Важнейшие классы векторных полей

Потенциальные и безвихревые векторные поля, их характерные свойства, связь между ними. Построение скалярного потенциала. Соленоидальные и бездивергентные векторные поля, их характерные свойства, связь между ними. Построение векторного потенциала. Теорема Гельмгольца. Центральные векторные поля. Напряженность полей, создаваемых произвольно распределенными массой или зарядом. Теорема Гаусса. Ее применение к расчету напряженности симметричных гравитационных и электрических полей.

Глава 5. Числовые и функциональные ряды

19. Бесконечные ряды и произведения

Сумма бесконечного ряда комплексных чисел. Примеры сходящихся и расходящихся рядов. Основное необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Понятия абсолютной и условной сходимости. Линейность и ассоциативность суммы ряда. Пример нарушения коммутативности. Теорема Римана об условно сходящихся рядах. Коммутативность суммы абсолютно сходящегося ряда. Теорема об умножении абсолютно сходящихся рядов. Немного о кратных и повторных рядах. Бесконечные произведения. Связь произведений и рядов.

20. Специальные признаки сходимости

Общие признаки сравнения для положительных рядов. Сравнение ряда с геометрической прогрессией: признаки Коши и Даламбера. Интегральный признак Маклорена — Коши. Пример: вещественная область определения дзета-функции Римана. Признаки Раабе и Бертрана. Признак Гаусса. Пример: гипергеометрический ряд. Лемма Абеля. Признаки Дирихле и Абеля. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда класса Лейбница. Два признака сходимости бесконечного произведения.

21. Функциональные последовательности

Основные вопросы, связанные с представлением функции в виде предела функциональной последовательности или суммы функционального ряда. Равномерная сходимость последовательности функций. Критерий Коши равномерной сходимости. Теорема о перестановке двух предельных переходов. Теоремы о непрерывности, дифференцировании и интегрировании предельной функции.

22. Функциональные ряды

Равномерная сходимость функционального ряда. Критерий Коши и мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Теоремы о предельном переходе, непрерывности, дифференцировании и интегрировании для функциональных рядов. Примеры их применения в теории тригонометрических рядов. Теорема Лебега об интегрировании суммы ряда функций. Примеры ее применения к вычислению интегралов, выражающихся через гамма-функцию Эйлера и дзета-функцию Римана.

23. Степенные ряды

Первая теорема Абеля, или круг сходимости степенного ряда. Вычисление радиуса сходимости по коэффициентам ряда: формула Коши — Адамара и формула Даламбера. Равномерная сходимость на меньших кругах. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов внутри круга сходимости. Степенной ряд как ряд Тейлора для своей суммы. Поведение суммы степенного ряда в граничных точках области сходимости, или вторая теорема Абеля. Примеры ее применения.

Литература

1. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2, 3.
2. Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа. Т. 1, 2.
3. В. А. Ильин, Э. Г.Позняк. Основы математического анализа.
4. В. А. Зорич. Математический анализ. Т. 1, 2.
5. В. И. Арнольд. Математические методы классической механики.
6. Б. М. Будак, С. В. Фомин. Кратные интегралы и ряды.
7. П. И. Романовский. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа.
8. Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.
9. Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1, 2, 3.
10. В. Д. Бутузов, Н. И. Крутицкая, Г. Н. Медведев, А. А. Шикин. Математический анализ в вопросах и задачах.
11. Б. Л. Краснов и др. Векторный анализ.

План семинаров

1. Системы гладких функций

Дифференцирование отображений (1 час). Неявные функции (2 часа). Преобразование дифференциальных выражений (4 часа). Гладкие многообразия (2 часа). Условный экстремум (3 часа).

2. Интегрирование функций нескольких переменных

Двойные интегралы (3 часа). Тройные интегралы (3 часа). Обзор теории Лебега (1 час). Вычисление многомерных интегралов (3 часа). Зависимость интеграла от параметра (3 часа).

3. Интегрирование дифференциальных форм

Дифференциальные формы (3 часа). Криволинейные интегралы (4 часа). Поверхностные интегралы (4 часа). Классические интегральные формулы (4 часа). Точные и замкнутые формы (2 часа).

4. Основы векторного анализа

Градиент. Ротор. Дивергенция (4 часа). Ортогональные криволинейные координаты (2 часа). Важнейшие классы векторных полей (2 часа).

5. Числовые и функциональные ряды

Бесконечные ряды и произведения (2 часа). Специальные признаки сходимости (3 часа). Функциональные последовательности (1 час). Функциональные ряды (2 часа). Степенные ряды (3 часа).

Программу лекций
и план семинарских занятий
по математическому анализу
составил профессор В. В. Иванов

Задания по математическому анализу

2 семестр

Задание 1
Системы гладких функций

(сдать к концу зимы)

1. Формула Клапейрона. Рассмотрим уравнение $f(x_1, \ldots, x_n) = c$, где c — фиксированная постоянная, а f — гладкая функция, у которой все частные производные первого порядка отличны от нуля. Таким образом, каждая из переменных x_i локально может быть представлена как функция остальных переменных x_j, $j \neq i$. Докажите тождество

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial x_1} \equiv (-1)^n.$$

В качестве примера рассмотрите знакомые вам величины P, V, T и связывающее их соотношение

$$\frac{P\,V}{T} = \text{const}.$$

2*. Функциональные определители. Рассмотрим систему дважды гладких функций $f_1, \ldots, f_n$ от переменных $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Для каждого $k = 1, \ldots, n+1$ построим якобиан

$$I_k = \frac{\partial\,(f_1, \ldots, f_n)}{\partial\,(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1})}.$$

Докажите справедливость следующего замечательного тождества:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \frac{\partial I_k}{\partial x_k} \equiv 0.$$

3. Неявные функции.

(a) Непрерывная функция $z = z(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 - y^2 + 2z^2 + xy - zy = 0$$

———————-

Звездочкой отмечены задачи, исключенные из числа обязательных.

и условию $z(0,1) = 1$. Докажите, что в некоторой окрестности точки $(0,1)$ она бесконечно дифференцируема, а в самой этой точке посчитайте dz и d^2z.

(б) Найдите производные первого и второго порядка гладких функций $x = x(z)$ и $y = y(z)$ в точке $z = 2$, если $x(2) = 1$, $y(2) = -1$ и

$$x^2 + y^2 \ = \ z^2/2, \qquad x + y + z \ = \ 2$$

4. Обратные отображения.

(а) Пусть для гладких функций $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ в точке $x = 0$, $y = 0$ выполнены условия: $u = 0$, $v = 0$ и

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ = \ 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \ = \ 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \ = \ 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \ = \ 3.$$

Докажите, что вблизи точки $u = 0$, $v = 0$ определены гладкие обратные функции $x = x(u,v)$ и $y = y(u,v)$. Найдите их первые частные производные в указанной точке.

(б) Найдите $\partial z/\partial x$ и $\partial z/\partial y$ в точке, где $u = 0$ и $v = 1$, если

$$x \ = \ u + uv + v^2, \quad y \ = \ v - u^2, \quad z \ = \ 2u + \ln v.$$

5. Дифференциальные выражения.

(а) В уравнении $yy' + xy^2 + x^3 = 0$ перейдите к новым переменным u и t, которые связаны с прежними x и y двумя соотношениями:

$$u^2 - y^2 - x^2 \ = \ 0, \qquad x^2 - t^2 + u^2 \ = \ 0.$$

Результатом должно быть дифференциальное уравнение относительно u как функции от t с разделяющимися переменными.

(б) Принимая u и v за новые переменные, а $w = w(u,v)$ за новую функцию, преобразуйте уравнение

$$y \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \ \frac{\partial z}{\partial y} \ = \ \frac{2}{x},$$

если $u = x/y$, $v = x$ и $w = xz - y$.

(в) Преобразуйте к полярным координатам r и φ следующее дифференциальное выражение:

$$y^2 \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x \ \frac{\partial z}{\partial x} - y \ \frac{\partial z}{\partial y}.$$

6. Условно стационарные точки. Следующие две задачи решите двумя способами: методом исключения дифференциалов и методом множителей Лагранжа.

(а) Найдите условно стационарные точки функции $x+4y-2z$, если ее переменные связаны соотношениями:

$$x^3 + 64y^3 + 8z^3 + 12x + 48y + 2z = 26, \quad x + 4y = 2.$$

(б) Докажите, что уравнения

$$-x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0, \quad x^2 + z^2 - u^2 + 9 = 0$$

определяют гладкое двумерное многообразие в четырехмерном арифметическом пространстве. Найдите на нем условно стационарные точки функции $x - u$. Опишите касательные плоскости к многообразию в найденных вами точках.

7. Наибольшие и наименьшие значения.

(а) Выясните, какие точки поверхности $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8z + 4$ наиболее удалены от точки $(0, 0, 4)$ и на какое расстояние.

(б) Докажите, что функция $x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 2y$ достигает наименьшего и наибольшего значений на множестве точек плоскости, удовлетворяющих условию $2x^2 + 5y^2 \leq 2xy + 25$, и найдите их.

(в) Убедитесь, что система уравнений

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad x^2 + z^2 + u^2 = 4,$$

задает еще одно гладкое двумерное многообразие в пространстве четырех измерений. Докажите, что функция $xy + uz$ имеет на нем минимум и максимум. Найдите эти значения, а в соответствующих точках опишите касательные плоскости.

8*. Вращения евклидова пространства.

Если в n-мерном евклидовом пространстве выбран ортонормированный базис, вращения этого пространства описываются ортогональными матрицами размера $n \times n$ с определителем, равным единице. Множество всех таких матриц называется специальной ортогональной группой и обозначается символом $SO(n)$.

(а) Докажите, что $SO(n)$ действительно является группой по отношению к операции обычного умножения матриц.

(б) Докажите, что $SO(n)$, кроме того, является гладким многообразием, причем групповые операции — умножение и обращение матриц — представляют собой гладкие отображения. Покажите, что это многообразие компактно и связно. Определите его размерность.

(в) Одной из точек многообразия $SO(n)$ является единичная матрица E порядка n. Опишите касательное пространство к этому многообразию в точке E. Посчитайте в этой точке дифференциал операции обращения $A \to A^{-1}$. Чему равен его якобиан?

(г) Докажите, что конфигурационное пространство — множество всевозможных положений — обычного твердого тела, вращающегося в обычном пространстве вокруг одной неподвижной своей точки, адекватно описывается группой $SO(3)$.

(д) В предыдущем утверждении предполагалось, что тело имеет хотя бы три точки, не лежащие на одной прямой. Например, для прямолинейного стержня, вращающегося в пространстве вокруг одного неподвижного своего конца, — сферический маятник — конфигурационным пространством служит сфера S^2. Если же вращения стержня ограничить какой-либо плоскостью — плоский маятник, — его конфигурационным пространством будет окружность S^1. Докажите, что многообразия S^1 и $SO(2)$ диффеоморфны.

9*. Линейные дифференциальные операторы.

Решая следующие задачи, вы не только укрепитесь в навыках дифференцирования, но и познакомитесь с важными понятиями.

Векторное поле A в области арифметического пространства размерности n можно определить как систему гладких в этой области функций $A_1, \ \ldots \ , A_n$. С каждым таким полем связан дифференциальный оператор первого порядка L_A, действующий на любую гладкую в рассматриваемой области функцию u по правилу

$$L_A \ u \ = \ A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \ + \ \ldots \ + \ A_n \frac{\partial u}{\partial x_n}.$$

Проверьте, что оператор L_A линеен, т. е.

$$L_A \ (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \ = \ \lambda_1 \ L_A \ u_1 \ + \ \lambda_2 \ L_A \ u_2,$$

и для него справедлива формула Лейбница:

$$L_A \ (uv) \ = \ u \ L_A \ v \ + \ v \ L_A \ u.$$

Докажите, что описанное соответствие между векторными полями и дифференциальными операторами взаимно однозначно, а именно: если два поля A и B таковы, что $L_A u = L_B u$ для всех гладких функций u, то $A = B$.

10*. Коммутатор дифференциальных операторов.

Убедитесь на конкретных примерах, что операторы L_A и L_B, отвечающие разным полям A и B, вообще говоря, не коммутируют: произведение $L_B L_A$, как правило, не равно произведению $L_A L_B$. Поэтому имеет смысл рассматривать их коммутатор $L_B L_A - L_A L_B$. Как разность двух дифференциальных операторов второго порядка, он тоже должен иметь порядок не выше двух. Докажите, что на самом деле коммутатор представляет собой линейный дифференциальный оператор первого порядка, т. е. имеет вид L_C , где C — некоторое векторное поле. Как отмечалось, этим поле C определяется однозначно. Докажите, что его компоненты выражаются через компоненты полей A и B по формулам:

$$C_j = \sum_{i=1}^{n} \left(B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right).$$

11*. Скобка Пуассона векторных полей.

Таким образом, каждая пара векторных полей A и B порождает третье векторное поле C , для которого $L_C = L_B L_A - L_A L_B$. Поле C называют коммутатором или скобкой Пуассона полей A и B, обозначая его символом $[A,\ B]$. Докажите, что скобка Пуассона — как бинарная операция — линейна по каждому сомножителю, антикоммутативна и удовлетворяет тождеству Якоби:

$$[\,[A,\ B],\ C] + [\,[B,\ C],\ A] + [\,[C,\ A], B] = 0.$$

Говорят, что каждый математик должен когда-нибудь в своей жизни лично убедиться в справедливости этого замечательного соотношения. Думаю, каждый физик — тоже.

12*. Скобка Пуассона двух функций.

Познакомимся еще с одной конструкцией, представляющей собой важный элемент математического аппарата аналитической механики. Пусть гладкие функции u и v зависят от $2n$ переменных, разделенных на две группы: $q_1, \ldots, q_n$ и $p_1, \ldots, p_n$. Переменные первой группы называют обобщенными координатами, а второй — обобщенными импульсами. Скобкой Пуассона функций u и v называется новая функция

$$(u, v) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \ \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} \ - \ \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right).$$

(1) Докажите, что эта операция также билинейна, антисимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби.

(2) Если одна из функций представлена в виде произведения, скобка Пуассона вычисляется по правилу Лейбница.

(3) Посчитайте скобки Пуассона всех пар базисных переменных.

(4) С каждой гладкой функцией a от указанных двух групп переменных можно связать векторное поле

$$A \ = \ \left(\frac{\partial a}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial a}{\partial p_n}, -\frac{\partial a}{\partial q_1}, \ldots, -\frac{\partial a}{\partial q_1} \right).$$

Его называют гамильтоновым полем, а породившую его функцию — гамильтонианом этого поля. Пусть B — еще одно такое поле, построенное по функции b. Докажите, что скобка Пуассона $[A, B]$ векторных полей A и B тоже является гамильтоновым векторным полем, а его гамильтонианом служит скобка Пуассона (a, b) гамильтонианов a и b.

13*. Преобразование Лежандра.

Рассмотрим дважды гладкую функцию $f(x_1, \ \ldots \ , x_n)$ с ненулевым гессианом:

$$\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \ \neq \ 0.$$

Докажите, что при этом условии система соотношений

$$y_i \ = \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ \ldots \ , x_n) \qquad (i \ = \ 1, \ \ldots \ , n)$$

задает локально диффеоморфный переход от переменных $x_1, \ \ldots \ , x_n$ к переменным $y_1, \ \ldots \ , y_n$. Поэтому каждую гладкую функцию от $x_1, \ \ldots \ , x_n$, в частности, сами эти переменные и функцию f, локально можно представить как гладкие функции от $y_1, \ \ldots \ , y_n$.

Учитывая сказанное, построим новую функцию g от новых переменных $y_1, \ \ldots \ , y_n$, полагая

$$g(y_1, \ \ldots \ , y_n) \ = \ \sum_{i=1}^{n} y_i \ x_i \ - \ f(x_1, \ \ldots \ , x_n).$$

Функция g называется преобразованием Лежандра функции f . Докажите, что произведение гессианов функций f и g, посчитанных в соответствующих точках, равно единице. Таким образом, к функции g тоже применимо преобразование Лежандра. Покажите, что в результате новые переменные перейдут в старые:

$$x_i = \frac{\partial g}{\partial y_i}(y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

а из функции g получится исходная функция f, т. е. преобразование Лежандра инволютивно.

14*. Уравнения Лагранжа и Гамильтона

В лагранжевой механике каждая механическая система задается некоторой функцией $L = L(q_1, \ldots, q_n, v_1, \ldots, v_n, t)$, называемой функцией Лагранжа этой системы. Всякое движение системы, т. е. изменение ее состояния с течением времени t, описывается набором функций $q_i = q_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяющим системе дифференциальных уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i},$$

в которых после дифференцирования L по q_i и по v_i делают подстановки $q_i = q_i(t)$ и $v_i = \dot{q}_i(t)$, в результате чего каждое из них превращается в конкретное соотношение, связывающее переменную t, функции $q_i(t)$ и их производные $\dot{q}_i(t)$ и $\ddot{q}_i(t)$. В большинстве случаев лагранжиан L как функция от $v_1, \ldots, v_n$, при фиксированных других переменных, представляет собой положительно определенную квадратичную форму, так что гессиан отличен от нуля. Докажите, предполагая выполненным последнее условие, что система уравнений Лагранжа эквивалентна системе уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

где гамильтониан $H = H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$, как функция от $p_1, \ldots, p_n$, является преобразованием Лежандра функции Лагранжа $L = L(q_1, \ldots, q_n, v_1, \ldots, v_n, t)$, по переменным $v_1, \ldots, v_n$.

15*. Канонические преобразования.

Если в пространстве с координатами $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ перейти к новым переменным $Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n$, то гамильтонова система, вообще говоря, утратит свою красивую симметричную форму. Однако существуют такие замечательные преобразования — они называются каноническими, — после которых любая система Гамильтона выглядит так же, как прежде:

$$\dot{P}_i \;=\; -\frac{\partial H}{\partial Q_i}, \qquad \dot{Q}_i \;=\; \frac{\partial H}{\partial P_i}.$$

Докажите, что преобразование является каноническим тогда и только тогда, когда скобки Пуассона новых переменных по старым удовлетворяют соотношениям:

$$(Q_i, Q_j) = 0, \quad (Q_i, P_j) = \delta_{ij}, \quad (P_i, P_j) = 0.$$

Задание 2

Интегрирование функций нескольких переменных

(сдать во второй декаде марта)

1. Повторные интегралы. (1) Измените порядок интегрирования в повторных интегралах:

$$\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\;dy; \qquad\qquad \int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} f(x,y)\;dy.$$

Нарисуйте области, по которым вычисляются соответствующие двойные интегралы. (2) Докажите формулу Дирихле:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)\;dy \;=\; \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x,y)\;dx.$$

2. Замена переменных. (1) Укажите область, в которую переходит треугольник $0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x,$ при замене переменных $x{+}y = u,\ y = uv.$ С помощью координатных линий опишите, как действует это преобразование. Выразите двойной интеграл по треугольнику от произвольной функции в координатах u и v. (2) Подберите

замену переменных, переводящую криволинейный четырехугольник, ограниченный линиями

$$xy = 1, \quad xy = 2, \quad y = 2x, \quad 2y = x$$

и лежащий в области $x > 0, \ y > 0,$ в прямоугольник со сторонами, параллельными осям новых координат. Преобразуйте двойной интеграл по четырехугольнику к новым переменным. (3) Перейдите к полярным координатам в интегралах

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\ dx\,dy\ ; \qquad \iint\limits_{x^2+y^2\le x} f(y/x)\ dx\,dy.$$

3. Посчитайте следующие двойные интегралы:

$$\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} (|x|+|y|)\ dx\,dy; \qquad \iint\limits_{x^4+y^4\le 1} (x^2+y^2)\ dx\,dy.$$

4. Найдите площади лежащих в пространстве плоских фигур, ограниченных следующими линиями, каждая из которых представлена в виде пересечения поверхности и плоскости:

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz \ = \ 1, \qquad x+y+z \ = \ 0;$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ = \ 0, \qquad z \ = \ 1-2(x+y).$$

5. Вычислите тройные интегралы по области V , ограниченной эллипсоидом с полуосями a, b, c :

$$\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\ dx\,dy\,dz; \quad \iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\ dx\,dy\,dz.$$

6. По области $V,$ ограниченной плоскостью $x+y+z=1$ и тремя координатными плоскостями, найдите интегралы:

$$\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}; \qquad \iiint\limits_V xyz\ (1-x-y-z)\ dx\,dy\,dz.$$

Первый из них посчитайте по слоям, параллельным первой из указанных плоскостей. Для вычисления второго интеграла воспользуйтесь заменой

$$x+y+z \ = \ \xi, \quad y+z \ = \ \xi\,\eta, \quad z \ = \xi\,\eta\,\zeta.$$

Опишите область, в которую переходит симплекс V при таком преобразовании координат.

7. Найдите объемы тел, ограниченных поверхностями:

(а) $(x^2+y^2+z^2)^3 = z^2(x^2+y^2)^{-1}$; (в) $|x|^{1/2}+|y|^{1/2}+|z|^{1/2}=1$;

(б) $x^2+y^2+z^2=2z,\ x^2+y^2\le z^2$; (г) $|x|^{1/3}+|y|^{1/3}+|z|^{1/3}=1$;

8. Исследуйте сходимость несобственных двойных интегралов:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx\,dy}{1+|x|^{\alpha}|y|^{\beta}};\quad \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\frac{dx\,dy}{|x-y|^{p}};\quad \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\frac{dx\,dy}{(x+y)^{p}};$$

9. Исследуйте сходимость несобственных тройных интегралов:

$$\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|\ge 1}\frac{dx\,dy\,dz}{|x|^{a}+|y|^{b}+|z|^{c}};\quad \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}\frac{dx\,dy\,dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^{p}}.$$

10. Механические иллюстрации. (а) Найдите массу и координаты центра тяжести однородного тела единичной плотности, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=2z$ и $x+y=z$. (б) Определите моменты инерции относительно координатных плоскостей однородного тела плотности ϱ_0, ограниченного поверхностью $z=(x^2+y^2+z^2)^3$. (в) Вычислите потенциал на себя однородного шара радиуса R плотности ϱ_0 . Он выражается следующим шестикратным интегралом:

$$\frac{\varrho_0^2}{2}\iiint\int\iint\limits_{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2\le R^2\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2\le R^2}}\frac{dx_1\ dy_1\ dz_1\ dx_2\ dy_2\ dz_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}.$$

11. Многомерные образы.

(а)* В четырехмерном арифметическом пространстве рассмотрим куб, определяемый неравенствами $0\le x_i\le 1$, где $i=1,2,3,4$, и гиперплоскость $x_1+x_2+x_3+x_4=2$. Докажите, что пересечение этих множеств представляет собой трехмерный многогранник. Найдите его объем, площади граней, длины ребер и координаты вершин. Как называется этот многогранник? Нарисуйте его.

(б) Какую долю от пятимерного куба составляет вписанный в него шар? Каков ответ в десятимерном пространстве?

(в) Вам подарили круглое, спелое миллионмерное яблоко радиуса 5 см. Как и положено, прежде чем съесть, вы помыли его. В результате яблоко лишилось очень тонкого своего верхнего слоя — толщиной всего лишь вполовину микрона. А какой процент объема этого плода потеряли вы? P. S. Разумно ли мыть многомерные фрукты?

(г) Найдите объем $n-$мерной пирамиды

$$x_1 + x_2 + \ \ldots \ + x_n \ \leq \ 1, \quad x_i \ \geq \ 0,$$

и объем $n-$мерного конуса

$$x_1^2 + x_2^2 + \ \ldots \ + x_{n-1}^2 \ \leq \ x_n^2, \quad 0 \ \leq \ x_n \ \leq \ 1.$$

12. Многомерные интегралы. (а) Дана квадратичная форма

$$q(x_1, \ldots, x_n) \ = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i x_j.$$

Вычислите $n-$кратные интегралы:

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 q(x_1, \ldots, x_n) \ dx_1 \ldots dx_n; \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-q(x_1, \ldots, x_n)} \ dx_1 \ldots dx_n.$$

(б) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $0 \leq x \leq 1$. Докажите равенство

$$\int\limits_0^1 f(x_1)\, dx_1 \int\limits_0^{x_1} f(x_2)\, dx_2 \ \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n \ = \ \frac{1}{n!} \left(\int\limits_0^1 f(x)\, dx \right)^n.$$

13. Зависимость интеграла от параметра.

(а) Применяя дифференцирование по параметру, вычислите интегралы:

$$\int\limits_0^\pi \ln\left(1 - 2a\cos x + a^2\right) dx \qquad \int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x\right) dx.$$

(б) Применяя интегрирование по параметру, вычислите интегралы:

$$\int\limits_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx, \qquad \int\limits_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx.$$

(в) Применяя асимптотические свойства интеграла Лапласа, о которых вам говорили на лекциях, вычислите интегралы Френеля:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx.$$

14. Представление функций интегралами.
(а)*. Докажите, что функция Бесселя

$$J_n(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi$$

целого индекса n удовлетворяет уравнению Бесселя

$$x^2 J_n''(x) \;+\; xJ_n'(x) \;+\; (x^2-n^2)J_n(x) \;=\; 0.$$

(б)* Докажите, что полные эллиптические интегралы

$$E(k) \;=\; \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \quad \text{и} \quad F(k) \;=\; \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

бесконечно дифференцируемы по k на интервале $0<k<1$. Выразите их первые производные через сами эти функции.
(в)* Для гладкой функции $f(x,y)$ построим интеграл:

$$u(x,y) \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{x} d\xi \int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi,\eta)\;d\eta.$$

Опишите и нарисуйте область, по которой здесь ведется интегрирование. Докажите, что функция u дважды гладкая и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;-\; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \;=\; f(x,y).$$

(г) Ньютоновым потенциалом тела в точке (x,y,z) называется интеграл

$$u(x,y,z) \;=\; \iiint\limits_V \frac{\varrho\,(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}},$$

где ϱ — плотность тела, а V — занимаемая им область пространства. Докажите, что вне этой области функция u бесконечно дифференцируема; ее первые производные по x, y и z, с точностью до постоянного множителя, равны компонентам силы, с которой тело притягивает материальную точку, имеющую единичную массу и координаты (x, y, z); а сумма ее вторых производных равна нулю, т. е. ньютонов потенциал представляет собой гармоническую функцию.

15*. Основания выпуклого многоугольника. Представим себе выпуклый многоугольник, все степени свободы которого ограничены вертикальной плоскостью. Всякую его сторону, на которой он способен стоять на горизонтальной линии, не опрокидываясь на одну из соседних сторон, назовем основанием многоугольника. Основание будем считать устойчивым, если располагающийся на нем многоугольник нельзя уронить, чуть-чуть наклоняя его в ту или иную сторону.

Ясно, что хоть одно такое основание должно быть. Впрочем, почему? Но самое интересное не в этом: оказывается, любой выпуклый многоугольник имеет, по крайней мере, два устойчивых основания. Существует очень простое и красивое доказательство этого утверждения, опирающееся на встречавшуюся вам теорему Гурвица об экстремумах периодических функций. Найдите его.

В пространстве ситуация уже иная: покажите, что одно устойчивое основание у выпуклого многогранника всегда есть, но второго, даже если не требовать от него устойчивости, может и не быть.

Задание 3

Интегрирование дифференциальных форм

(сдать к середине апреля)

1. Докажите, что дифференциальная форма, степень которой выше размерности пространства, равна нулю. Таким образом,
— на прямой с координатой x имеются только 0-формы и 1-формы с коэффициентами, зависящими от x :

$$\omega_1^0 \ = \ f, \qquad \omega_1^1 \ = \ f\,dx;$$

— на плоскости с координатами x, y могут быть лишь формы степеней 0, 1 и 2 с коэффициентами, зависящими от x и y :

$$\omega_2^0 \ = \ f, \quad \omega_2^1 \ = \ P\,dx + Q\,dy, \quad \omega_2^2 \ = \ f\,dx \wedge dy;$$

— в трехмерном пространстве с координатами x, y, z, бывают формы степеней 0, 1, 2 и 3, а их коэффициенты — функции от x, y и z :

$$\omega_3^0 \;=\; f, \quad \omega_3^1 \;=\; P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$$\omega_3^2 \;=\; P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy, \quad \omega_3^3 \;=\; f\,dx \wedge dy \wedge dz.$$

2. Для указанных форм рассмотрите все возможности их внешнего умножения. Перемножьте формы и приведите подобные. Покажите, что внешний квадрат формы первой степени всегда равен нулю. Докажите справедливость этого утверждения для любых форм нечетной степени произвольного числа переменных. Вот более общее утверждение:

$$\omega^k \wedge \omega^l \;=\; (-1)^{k\,l}\,\omega^l \wedge \omega^k.$$

3. Запишите формулы для производных исходных девяти форм, не забыв привести подобные. А теперь продифференцируйте те произведения, которые получились в предыдущей задаче, и убедитесь, что во всех случаях справедливо равенство:

$$d\,(\omega^k \wedge \omega^l) \;=\; d\omega^k \wedge \omega^l \;+\; (-1)^k\,\omega^k \wedge d\omega^l.$$

Таким образом, если первый сомножитель имеет четную степень, — это в точности правило Лейбница, если же степень нечетная, — знак плюс в этом правиле нужно заменить на минус.

4. В каждой из приведенных выше девяти форм сделайте следующие замены переменных и приведите подобные:

(а) $x = x\,(t), \quad y = y\,(t), \quad z = z\,(t);$

(б) $x = x\,(u, v), \quad y = y\,(u, v), \quad z = z\,(u, v);$

(в) $x = x\,(u, v, w), \quad y = y\,(u, v, w), \quad z = z\,(u, v, w).$

Для преобразованных форм второй и третьей степени собранные коэффициенты запишите в виде якобианов. Рассматривая прежние формы и тот же список новых переменных, убедитесь, что внешнее умножение и замена переменных — коммутирующие операции над формами. То же самое относится и к внешнему дифференцированию — докажите, что эту операцию и замену переменных также можно переставлять местами.

5. (а) Следующие две формы на плоскости, заданные в декартовых переменных x, y, запишите в полярных координатах ϱ, φ :

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

Посчитайте производные и произведение этих форм. Вычисления проведите в декартовых и полярных координатах. (б) Выразите в полярных координатах форму $dx \wedge dy$.

6. (а) Перейдите к цилиндрическим координатам ϱ, φ, z в следующих формах от трех декартовых переменных x, y, z :

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

То же самое сделайте для сферических координат r, ϑ, φ. Запишите эти формы в каждой системе координат в виде дифференциалов соответствующих функций. (б) Выразите в цилиндрических и сферических координатах форму второй степени от трех декартовых переменных:

$$\frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Посчитайте ее внешнюю производную и произведения с формами из предыдущей задачи, проведя вычисления в каждой из трех упомянутых систем координат. В каких переменных формулы и вычисления самые простые? (в) Представьте форму $dx \wedge dy \wedge dz$ в цилиндрических и сферических координатах.

7*. (а) Посчитайте значения форм dx, dy, $d\varrho$, $d\varphi$ на базисных векторах e_1, e_2 декартовой системы координат на плоскости, приложенных к точкам $(\pm 1, 0)$ и $(0, \pm 2)$. Вычислите значение форм $dx \wedge dy$ и $d\varrho \wedge d\varphi$ на паре векторов (e_1, e_2), приложенных к указанным точкам. (б) Найдите значения форм dx, dy, dz, $d\varrho$, $d\varphi$, dr, $d\vartheta$ на базисных векторах e_1, e_2, e_3 декартовой системы координат в пространстве, приложенных к точкам $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 2, 0)$ и $(0, 0, \pm 3)$. Выясните также, чему равны значения форм

$$dy \wedge dz, \quad dz \wedge dx, \quad dx \wedge dy;$$

$$d\varphi \wedge dz, \quad dz \wedge d\varrho, \quad d\varrho \wedge d\varphi; \quad d\vartheta \wedge d\varphi, \quad d\varphi \wedge dr, \quad dr \wedge d\vartheta$$

на парах векторов (e_1, e_2), (e_1, e_3), (e_2, e_3), приложенных к тем же точкам. Наконец, посчитайте значения форм

$$dx \wedge dy \wedge dz, \quad d\varrho \wedge d\varphi \wedge dz, \quad dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi$$

на тройке векторов (e_1, e_2, e_3) в тех же самых точках. Если вы правильно поняли задание, всего у вас должно получиться — страшно сказать — 346 ответов (впрочем, если это поделить на число студентов в потоке...). Дайте геометрическую интерпретацию результатам ваших вычислений.

8. Вычислите интегралы от 1-форм по линиям на плоскости:

$$\int\limits_C (2-y)\,dx + x\,dy, \qquad \int\limits_L (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy,$$

где C — третья арка циклоиды $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,$ если считать от начала координат слева направо, и двигаться по ней в том же направлении, а L — ломаная $y = 1 - |1-x|,\ 0 \le x \le 2,$ направленная в обратную сторону. По тем же линиям посчитайте интегралы от форм, указанных в задаче 5 (а). От них же найдите интегралы по окружности $x^2+y^2=1,$ эллипсу $4x^2-8x+y^2=0$ и первым двум виткам архимедовой спирали $\varrho = \varphi,$ ориентированным против часовой стрелки.

9. Посчитайте интегралы от 1-форм по линиям в пространстве:

$$\int\limits_{C_\pm} (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz,$$

где $C_\pm$ — окружности, по которым единичная сфера с центром в нуле пересекается вертикальными плоскостями $y = \pm x,$ и которые пробегаются против часовой стрелки, если наблюдать за этим со стороны положительной полуоси абсцисс. По тем же окружностям посчитайте интегралы от форм из задачи 6 (а). Вычислите еще один интеграл:

$$\int\limits_C y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz,$$

где C — ориентированная аналогичным образом верхняя часть кривой Вивиани, высекаемой из той же сферы цилиндром $x^2+y^2=x.$

10. (а) Применяя формулу Ньютона — Лейбница, найдите интегралы:

$$\int\limits_{(0,0)}^{(a,b)} e^x\,(\cos y\,dx - \sin y\,dy), \qquad \int\limits_{(1,2,3)}^{(7,1,1)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz.$$

(б) Преобразуйте в определенный интеграл по отрезку от 0 до 1 следующий интеграл от 1-формы:

$$\int\limits_L f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,(x\,dx + y\,dy + z\,dz),$$

где f — непрерывная на числовой прямой функция, а линия L соединяет центр единичной сферы, служащий началом системы отсчета, с какой-нибудь точкой этой сферы.

11. (а) Пусть K — пробегаемый в положительном направлении контур треугольника с вершинами (1, 1), (3, 2) и (2, 5). Пользуясь формулой Грина, преобразуйте криволинейные интегралы

$$-\int\limits_K y\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_K x\,dy$$

в двойные, которые сведите к повторным и посчитайте до конца. Затем вычислите криволинейные интегралы непосредственно, параметризуя контур треугольника. Наконец, найдите площадь треугольника, как вы это делали в школе... Сравните результаты.

(б) Пусть V — объем тела, образованного вращением вокруг оси x простого замкнутого контура C, лежащего в верхней полуплоскости $y > 0$. Докажите, что при положительной ориентации контура C объем выражается формулой:

$$V \;=\; -\pi \int\limits_C y^2\,dx.$$

(в) Поток $\Pi(D)$ плоского векторного поля из области D наружу, как вы знаете, выражается интегралом

$$\Pi(D) \;=\; \int\limits_{\partial D} P\,dy - Q\,dx,$$

где P и Q — компоненты поля в декартовых координатах x и y, а ∂D — граница области, пробегаемая в положительном направлении. Пусть $S(D)$ — площадь области D. Докажите равенство:

$$\lim_{D\to O} \frac{\Pi(D)}{S(D)} \;=\; \frac{\partial P}{\partial x} \;+\; \frac{\partial Q}{\partial y},$$

где предел рассматривается при условии, что область D стягивается в точку O, и в этой же точке считаются производные P и Q.

12. (а) Найдите интеграл от формы второй степени:

$$\iint\limits_S x^2\,dy\wedge dz + y^2\,dz\wedge dx + z^2\,dx\wedge dy,$$

где S — внешняя сторона сферы радиуса R с центром (a,b,c).

(б) Посчитайте интеграл от 2-формы следующего вида:

$$\iint\limits_P f(x)\,dy\wedge dz + g(y)\,dz\wedge dx + h(z)\,dx\wedge dy,$$

где f, g, h — произвольные функции одной переменной, а P — внешняя сторона поверхности параллелепипеда $|x|\le a$, $|y|\le b$, $|z|\le c$. По ней же проинтегрируйте форму, приведенную в задаче 6 (б).

13. Примените формулу Стокса к вычислению следующих трех интегралов от форм первой степени по замкнутым контурам:

$$\text{(а)}\quad \int\limits_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz,$$

где линия C, вместе с направлением на ней, задана уравнениями $x = \sin^2 t,\ y = 2\sin t\cos t,\ z = \cos^2 t.$ Кстати, убедитесь, что это — эллипс. Опишите его расположение в пространстве.

$$\text{(б)}\quad \int\limits_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz,$$

где C — тоже эллипс, но теперь заданный как пересечение поверхностей $x^2+y^2=1,\ x+2z=1.$ При интегрировании движение по нему происходит против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной полуоси абсцисс. Каким видится это движение со стороны положительной полуоси аппликат?

$$\text{(в)}\quad \int\limits_C (y^2-z^2)\,dx + (z^2-x^2)\,dy + (x^2-y^2)\,dz,$$

где C — граничная линия сечения куба $0\le x,\,y,\,z\le 2$ плоскостью $x+y+z=3$, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть из вершины куба, наиболее удаленной от начала координат.

14. С помощью формулы Остроградского найдите интегралы от форм второй степени по замкнутым поверхностям:

$$\iint\limits_S x^2\,dy\wedge dz + y^2\,dz\wedge dx + z^2\,dx\wedge dy,$$

где S — внешняя сторона симплекса, построенного по трем базисным векторам, которые приложены к началу декартовых координат;

$$\iint\limits_S x^3\,dy\wedge dz + y^3\,dz\wedge dx + z^3\,dx\wedge dy,$$

где S — внешняя сторона единичной сферы с центром в нуле;

$$\iint\limits_S (x-y+z)\,dy\wedge dz + (y-z+x)\,dz\wedge dx + (z-x+y)\,dx\wedge dy,$$

где S — внешняя сторона многогранника

$$|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1.$$

Вычислите координаты вершин этого многогранника и нарисуйте его. Это очень просто.

15. (а) Для формы первой степени от двух переменных

$$(3x^2 + 4xy + y^3e^{xy})\,dx + (2x^2 + y(2+xy)e^{xy})\,dy$$

проверьте условие замкнутости и найдите первообразную. То же самое сделайте для формы первой степени от трех переменных

$$\left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}\,dz$$

и для формы второй степени от трех переменных

$$(xz-y)\,dy\wedge dz + (x-yz)\,dz\wedge dx - 2(x+y)\,dx\wedge dy.$$

(б) Докажите, что внешнее произведение замкнутых форм — тоже замкнутая форма. Если же замкнутую форму умножить на точную, получится точная форма. Укажите ее первообразную.

Задание 4

Основы векторного анализа

(сдать ко Дню Победы)

1. Поля и формы. Пусть ω_A^1 и ω_A^2 означают соответственно форму работы и форму потока, отвечающие векторному полю A :

$$\omega_A^1(u) \;=\; A\cdot u, \qquad \omega_A^2(u,v) \;=\; A\cdot(u\times v).$$

Каждое скалярное поле c, кроме того, что оно — само по себе — является формой нулевой степени, порождает форму ω_c^3, действующую на всякую тройку векторов по правилу

$$\omega_c^3(u,v,w) \;=\; c\,(u,v,w),$$

в которой играет роль плотности по отношению к объему.

Докажите, что для любых двух векторных полей A и B существуют такие векторное поле C и скалярное поле c, что

$$\omega_A^1\wedge\omega_B^1 \;=\; \omega_C^2 \quad \text{и} \quad \omega_A^1\wedge\omega_B^2 \;=\; \omega_c^3 \;=\; \omega_A^2\wedge\omega_B^1.$$

Этими условиями поля C и c определяются однозначно. Докажите, что породившим эти поля операциям умножения форм соответствуют две хорошо вам известные операции умножения векторов, составляющие основу векторной алгебры:

$$C \;=\; A\times B, \qquad c \;=\; A\cdot B.$$

2. Дифференциальные операции. При указанном выше соответствии между полями и формами, дифференцированию форм нулевой, первой и второй степени, как вы знаете, отвечают три основных дифференциальных операции векторного анализа:

$$dU=\omega^1_{\operatorname{grad}U}, \qquad d\omega_A^1=\omega^2_{\operatorname{rot}A}, \qquad d\omega_A^2=\omega^3_{\operatorname{div}A}.$$

Убедитесь, что следующие четыре правила векторного анализа соответствуют правилу дифференцирования произведения форм:

$$\operatorname{grad}(UV)=U\operatorname{grad}V+V\operatorname{grad}U, \quad \operatorname{div}(UA)=U\operatorname{div}A+A\cdot\operatorname{grad}U,$$

$$\operatorname{rot}(UA) = U \operatorname{rot} A - A \times \operatorname{grad} U, \qquad \operatorname{div}(A \times B) = B \cdot \operatorname{rot} A - A \cdot \operatorname{rot} B,$$

где U и V — скалярные, A и B — векторные поля. Приведите и прямое доказательство этих тождеств. Проверьте, что к тем же формулам приводит применение символического оператора Гамильтона.

3. Опираясь на предыдущие результаты, докажите, что для любых скалярных полей U и V справедливы следующие утверждения:

(а) Поле $V \operatorname{grad} U$ ортогонально своему ротору. Оно локально потенциально тогда и только тогда, когда градиенты полей U и V коллинеарны. В чем геометрический смысл этого условия? В общем случае — когда, например, градиент U не равен нулю — это условие означает, что V есть гладкая функция от U . Укажите потенциал обсуждаемого поля в этом случае.

(б) Поле $\operatorname{grad} U \times \operatorname{grad} V$ имеет нулевую дивергенцию. Более того, всюду, где определены функции U и V, это поле имеет векторный потенциал. Найдите его. Сравните с последней задачей из предыдущего задания.

4. Вот еще несколько упражнений, для решения которых у вас есть теперь много разных методов.

(а) Пусть $\vec{r}$ — радиус-вектор точки, $\vec{c}$ — постоянный вектор. Выразите следующие поля через векторы $\vec{c}$ и $\vec{r}$, используя только операции векторной алгебры:

$$\operatorname{grad} \vec{c} \cdot \vec{r}, \qquad \operatorname{rot} \vec{c} \times \vec{r}, \qquad \operatorname{div} \vec{c} \times \vec{r}, \qquad \operatorname{grad} |\, \vec{c} \times \vec{r}\,|^2.$$

(б) Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — постоянные векторы, а $\vec{r}$ — тот же радиус-вектор. Докажите равенства:

$$\operatorname{div}\, \vec{a} \times (\vec{r} \times \vec{b}) \;=\; 2\, \vec{a} \cdot \vec{b}, \qquad \operatorname{rot}\, (\vec{r} \cdot \vec{a})\, \vec{b} = \; \vec{a} \times \vec{b}.$$

(в) Пусть теперь $\vec{a}$ означает произвольное гладкое векторное поле, а $\vec{n}$ — постоянное направление, т. е. вектор единичной длины. Докажите равенство:

$$\vec{n} \cdot (\operatorname{grad}\, \vec{a} \cdot \vec{n} \;-\; \operatorname{rot}\, \vec{a} \times \vec{n}) \;=\; \operatorname{div} \vec{a}.$$

5. Центральные поля. Векторное поле назовем центральным, если оно имеет вид $f(r)\, \vec{r}$, где f — гладкая функция одной переменной, $\vec{r}$ — радиус-вектор точки, в которой рассматривается поле, а r — его

длина. (а) Докажите, что любое центральное поле, как в пространстве, так и на плоскости, потенциально. Найдите его скалярный потенциал. (б) Опишите все центральные поля в пространстве, имеющие нулевую дивергенцию. (в) Определите понятие дивергенции для векторного поля на плоскости и найдите все центральные плоские поля, для которых она равна нулю.

6. Интегрирование функций по линиям.

(а) Нарисуйте указанные линии и вычислите криволинейные интегралы:

$$\int_L (x^{4/3} + y^{4/3})\, ds, \qquad \int_C x^2\, ds, \qquad \int_\Gamma |y|\, ds,$$

где L — астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, линия C — это лежащая в плоскости $x + y + z = 0$ единичная окружность с центром в нуле, а Γ — лемниската $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

(б) С какой силой материальная точка, расположенная в центре однородной окружности, притягивается половиной этой окружности? А ее третью?

7. Интегрирование функций по поверхностям.

(а) Пусть S — часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанная цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$. Найдите координаты центра тяжести поверхности S, считая плотность ее постоянной. Посчитайте интеграл по S от функции $xy + xz + yz$.

(б) Вычислите потенциал однородной сферы для всех точек пространства. Нарисуйте график его зависимости от расстояния между точкой и центром сферы.

8. Замечания об интегрировании функций и форм.

(а) Пусть L — ориентированная линия в пространстве, направление на которой задано семейством единичных касательных $\vec{\tau}$. Возьмем в какой-нибудь ее точке касательный вектор $\vec{dl}$, имеющий длину dl и указывающий в сторону движения по линии, так что $\vec{dl} = \vec{\tau} dl$. Пусть τ_1, τ_2, τ_3 — компоненты вектора $\vec{\tau}$ в декартовых координатах x, y, z. Тогда значения форм dx, dy, dz на векторе $\vec{dl}$ выражаются формулами:

$$dx = \tau_1\, dl, \quad dy = \tau_2\, dl, \quad dz = \tau_3\, dl.$$

Эти соотношения позволяют легко и правильно переходить от интегрирования функций к интегралам от форм и обратно. Так, для векторного поля $\vec{A}$ с компонентами P, Q, R его работа вдоль вектора $\vec{dl}$ равна

$$\vec{A} \cdot \vec{dl} = \vec{A} \cdot \vec{\tau}\, dl = (P\,\tau_1 + Q\,\tau_2 + R\,\tau_3)\, dl = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

а вдоль линии L она, тем самым, выражается любым из интегралов:

$$\int\limits_L \vec{A} \cdot \vec{dl} \;=\; \int\limits_L \vec{A} \cdot \vec{\tau}\, dl \;=\; \int\limits_{(L,\,\vec{\tau})} P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

т. е. интегрирование функции $\vec{A} \cdot \vec{\tau}$ по L и формы работы ω^1_A по $(L, \vec{\tau})$ — эквивалентные операции.

(б) Рассмотрим теперь ориентированную поверхность S в трехмерном пространстве, сторона которой задана семейством единичных нормалей $\vec{n}$. Выберем в какой-нибудь точке поверхности два не коллинеарных касательных вектора $\vec{dl}_1$, $\vec{dl}_2$, составляющих положительный по отношению к нормали базис в касательной плоскости. Пусть $\vec{dS}$ означает их векторное произведение, так что $\vec{dS} = \vec{n}\,dS$, где dS — площадь параллелограмма, построенного по этим векторам. Докажите, что компоненты вектора $\vec{dS}$ в декартовой системе координат x, y и z равны ориентированным площадям проекций параллелограмма $(\vec{dl}_1, \vec{dl}_2)$ на координатные плоскости (y, z), (z, x) и (x, y). С другой стороны, эти площади равны, соответственно, значениям форм $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, и $dx \wedge dy$ на паре векторов $(\vec{dl}_1, \vec{dl}_2)$. Таким образом, если n_1, n_2, n_3 — компоненты вектора $\vec{n}$, то

$$dy \wedge dz \;=\; n_1\, dS, \quad dz \wedge dx \;=\; n_2\, dS, \quad dx \wedge dy \;=\; n_3\, dS,$$

Отсюда непосредственно вытекают соотношения, связывающие поверхностные интегралы от функций и от форм. Так, если $\vec{A}$ — векторное поле с компонентами P, Q, R, то его поток через ориентированную площадку $(\vec{dl}_1, \vec{dl}_2)$ равен

$$\vec{A} \cdot \vec{dS} \;=\; \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS \;=\; (P\,n_1 + Q\,n_2 + R\,n_3)\, dS \;=$$

$$=\; P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy.$$

Поток же через всю поверхность S, следовательно, выражается любым из интегралов

$$\iint\limits_S \vec{A}\cdot d\vec{S} \;=\; \iint\limits_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS \;=\; \iint\limits_{(S,\,\vec{n})} P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy,$$

т. е. интегрирование функции $\vec{A}\cdot\vec{n}$ по S эквивалентно интегрированию формы потока ω_A^2 по $(S,\vec{n})$.

(в) Снова рассмотрим линию L, но теперь уже на плоскости. В этом случае можно говорить не только о направлении, но и о стороне линии, понимая под этим семейство единичных ее нормалей, непрерывно меняющихся от точки к точке. Если же плоскость ориентирована, например, выбором на ней декартовых координат x и y, то можно даже определить понятия правой и левой стороны направленной линии. А именно, если направление задано семейством касательных $\vec{\tau}$, то согласованным с ним будем считать такое семейство нормалей $\vec{\nu}$, для которого в каждой точке линии пара $(\vec{\nu},\,\vec{\tau})$ ориентирована так же, как оси x, y. Определяемая этим семейством сторона и будет правой, а противоположная — левой.

Ясно, что для линии в пространстве подобные понятия не имеют смысла. Впрочем, если пространственная линия рассматривается не сама по себе, но как линия на некоторой ориентированной поверхности, этот смысл обретается вновь.

Возвращаясь к нашей плоской линии, докажите, что координаты τ_1, τ_2 вектора $\vec{\tau}$ и координаты ν_1, ν_2 согласованного с ним вектора $\vec{\nu}$ связаны равенствами: $\nu_1 = +\tau_2,\ \nu_2 = -\tau_1$. Таким образом, если символом $\vec{dl}$ обозначить направленный в сторону $\vec{\tau}$ касательный вектор длины dl, так что $\vec{dl} = \vec{\tau}\,dl$, то значения форм dx и dy на нем можно записать двумя способами:

$$dx \;=\; \tau_1\,dl, \;=\; -\nu_2\,dl, \qquad dy \;=\; \tau_2\,dl, \;=\; +\nu_1\,dl.$$

Пусть теперь $\vec{A}$ — плоское векторное поле с компонентами P и Q. Его работа на участке $\vec{dl}$ равна

$$\vec{A}\cdot\vec{\tau}\,dl \;=\; (P\,\tau_1 + Q\,\tau_2)\,dl \;=\; P\,dx + Q\,dy,$$

а вдоль всей линии L — выражается интегралами:

$$\int\limits_L \vec{A}\cdot\vec{\tau}\,dl \;=\; \int\limits_{(L,\,\vec{\tau})} P\,dx + Q\,dy.$$

С другой стороны, ясный смысл имеет и величина

$$\vec{A}\cdot\vec{\nu}\,dl \;=\; (P\,\nu_1 + Q\,\nu_2)\,dl \;=\; P\,dy - Q\,dx,$$

которая интерпретируется как поток поля $\vec{A}$ через отрезок $\vec{dl}$ в сторону вектора $\vec{\nu}$. Поток же через всю линию L в указанном направлении равен

$$\int\limits_L \vec{A}\cdot\vec{\nu}\,dl \;=\; \int\limits_{(L,\,\vec{\tau})} P\,dy - Q\,dx.$$

Итак, с нашим векторным полем на ориентированной плоскости естественным образом связаны две дифференциальные формы первой степени: форма работы $P\,dx + Q\,dy$ и форма потока $P\,dy - Q\,dx$, а интегрирование этих форм равносильно вычислению интегралов от касательной и нормальной составляющих поля.

Разберитесь хорошенько со всеми соотношениями, приведенными в трех частях этого раздела, и прочно запомните их.

9. Примените формулу Грина к решению следующих задач:

(а) Посчитайте циркуляцию вдоль границы заданной плоской области: постоянного поля, радиуса-вектора $\vec{r}$ и поля $\vec{r}/r^2$. Для тех же векторных полей найдите их потоки через границу области. Для последнего из указанных полей, чей поток выражается интегралом Гаусса, разберите случаи, когда начало координат лежит вне области, внутри нее и на ее границе.

(б) Докажите, что гармоническая в замкнутой плоской области функция полностью определяется своими значениями на границе. Для этого докажите прежде лемму: поток градиента от квадрата такой функции через границу области равен удвоенному интегралу от квадрата ее градиента по самой области.

10*. Согласно закону Био — Савара, электрический ток i, протекающий по элементу $\vec{dl}$ замкнутого проводника C, создает в пространстве магнитное поле, напряженность $d\vec{H}$ которого в точке $M(x, y, z)$, с точностью до коэффициента пропорциональности, равна

$$d\vec{H} \;=\; -i\,\frac{\vec{r}\times d\vec{l}}{r^3},$$

где $\vec{r}$ означает вектор, соединяющий точку M с элементом $d\vec{l}$. Найдите координаты напряженности $\vec{H}$ магнитного поля, создаваемого всем проводником C, выразив их контурными интегралами от соответствующих дифференциальных форм.

А теперь на контур C натянем пленку S и построим интеграл

$$W(x,y,z) \;=\; i\iint\limits_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\,dS,$$

где $\vec{n}$ — нормаль к S, согласованная с направлением тока на C, а вектор $\vec{r}$ по-прежнему начинается в точке $M(x,y,z)$, но теперь соединяет ее с текущей точкой поверхности S. Докажите, что функция W является потенциалом поля $\vec{H}$. Как нетрудно догадаться, здесь вам будет полезна формула Стокса.

11. В основе доказательства следующих утверждений лежит формула Остроградского.

(а) Пусть в замкнутой трехмерной области V, ограниченной гладкой поверхностью S, заданы дважды гладкие функции u и v. Докажите пространственный вариант так называемой второй формулы Грина:

$$\iiint\limits_V (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dx\,dy\,dz \;=\; \iint\limits_S (v\,\partial u/\partial n - u\,\partial v/\partial n)\,dS,$$

где Δ — оператор Лапласа, а символ $\partial/\partial n$ означает производную по направлению внешней нормали в текущей точке поверхности.

(б) Пусть $u = u(x,y,z)$ — гармоническая функция в замкнутой ограниченной области V с гладкой границей S. Докажите формулу:

$$u(x,y,z) \;=\; \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left[u\,\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right] dS,$$

где вектор $\vec{r}$ соединяет внутреннюю точку (x,y,z) области V с переменной точкой поверхности S, а $\vec{n}$ —- вектор внешней нормали.

(в) Из этой замечательной формулы вытекает ряд классических теорем, описывающих удивительные свойства гармонических функций. Вам предлагается найти их доказательства:

Теорема о среднем. Среднее значение гармонической функции на сфере равно значению этой функции в центре сферы.

Принцип максимума. Функция, гармоническая внутри ограниченной области и непрерывная вплоть до ее границы, не может достигать наибольшего и наименьшего значений внутри области, если она не является тождественной постоянной.

Теорема единственности. Если две функции, гармонические внутри ограниченной области и непрерывные вплоть до ее границы, совпадают в каждой граничной точке, они тождественно равны во всей области.

12. Пользуясь теоремой Гаусса, посчитайте напряженность $\vec{E}$ электрического поля, создаваемого равномерно заряженным: (а) шаровым слоем — областью пространства, заключенной между концентрическими сферами; (б) бесконечной в обе стороны трубой — областью, заключенной между двумя соосными цилиндрами; (в) бесконечной по четырем направлениям плитой — областью, заключенной между двумя параллельными плоскостями.

Обозначения для необходимых параметров выберете сами. Нарисуйте графики, отражающие зависимость величины E от r, где r означает расстояние от исследуемой точки: в первом случае — до центра сфер, во втором — до оси цилиндров, в третьем — до средней плоскости.

13. Выясните, какие из перечисленных ниже векторных полей потенциальны, а какие — соленоидальны:

(а) $(2xy + z)\,\vec{i} + (x^2 - 2y)\,\vec{j} + x\,\vec{k}$; $\qquad 3y^2\,\vec{i} - 3x^2\,\vec{j} - (y^2 + 2x)\,\vec{k}$;

(б) $z\,\vec{e_\varphi} - \cos\varphi\,\vec{e_z}/\varrho$; $\qquad e^\varrho \sin\varphi\,\vec{e_\varrho} + e^\varrho \cos\varphi\,\vec{e_\varphi}/\varrho + 2z\,\vec{e_z}$;

(в) $2r\,\vec{e_r} + \vec{e_\vartheta}/r + \vec{e_\varphi}/r\sin\vartheta$; $\qquad -\varphi\operatorname{ctg}\vartheta\,\vec{e_r}/r + \varphi\,\vec{e_\vartheta}/r + 2\cos\vartheta\,\vec{e_\varphi}/r$.

Найдите соответствующие — скалярные или векторные — потенциалы этих полей.

14. Найдите прямым вычислением в предложенных координатах:

(а) циркуляцию векторного поля $z\cos\varphi\,\vec{e_\varrho} + \varrho\,\vec{e_\varphi} + \varphi^2\,\vec{e_z}$ вдоль петли $\varrho = \sin\varphi$, $z = 1$, ориентированной параметром φ;

(б) циркуляцию векторного поля $r\vartheta\,\vec{e_r} + r\sin\vartheta\,\vec{e_\varphi}$ вдоль окружности $r = 1$, $\vartheta = \pi/4$, ориентированной так же;

(в) поток поля $\varrho\,\vec{e_\varrho} + \varrho\varphi\,\vec{e_\varphi} - 2z\vec{e_z}$ через замкнутую поверхность, ограниченную цилиндром $\varrho = 1$, полуплоскостями $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ и плоскостями $z = \pm 1$.

(г) поток поля $r\vec{e_r} + r\sin\vartheta\,\vec{e_\vartheta} - 3r\varphi\sin\vartheta\,\vec{e_\varphi}$ через замкнутую поверхность, ограниченную верхней полусферой радиуса R и плоскостью $\vartheta = \pi/2$.

А теперь попробуйте посчитать те же величины, формально применив, соответственно, теоремы Стокса и Остроградского. Совпадают ли новые результаты с прежними? Если нет, объясните — почему. Если да, то — тем более.

15*. Решите заново ту задачу из восьмого задания первого семестра, которая посвящена преобразованию Кельвина. Если впечатление от нее еще сохранилось в вашей памяти, то теперь вам остается лишь поразмышлять о достоинствах сферических координат и преимуществах разумного подхода к делу.

Задание 5

Числовые и функциональные ряды

(сдать до начала лета)

1*. Наряду с последовательностью чисел a_n рассмотрим средние арифметические σ_n первых n ее элементов. Докажите следующие утверждения:

(а) если последовательность a_n имеет предел, не обязательно конечный, то и σ_n имеет предел, причем, тот же самый;

(б) если ряд $\sum a_n/n$ сходится, то $\sigma_n \to 0$;

(в) если последовательность σ_n ограничена, то ряд $\sum a_n/n^{1+\varepsilon}$ сходится при любом $\varepsilon > 0$.

2. Посчитайте суммы

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots; \quad \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9} + \ldots.$$

3. (а) Исследуйте сходимость положительных рядов:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\,n!}{n^n}; \qquad (3)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^2}; \qquad (5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,e^n}{n^{n+p}};$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\, n!}{n^n}; \qquad (4)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}; \qquad (6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

(б) Исследуйте сходимость следующих двух рядов, зависящих от нескольких параметров:

$$(1)\quad \frac{a}{b} + \frac{a\,(a+d)}{b\,(b+d)} + \frac{a\,(a+d)\,(a+2d)}{b\,(b+d)\,(b+2d)} + \ \dots \qquad (a,b,d>0);$$

$$(2)\quad \left[\frac{p}{q}\right]^{\alpha} + \left[\frac{p\,(p+1)}{q\,(q+1)}\right]^{\alpha} + \left[\frac{p\,(p+1)\,(p+2)}{q\,(q+1)\,(q+2)}\right]^{\alpha} + \ \dots \quad (p,q>0).$$

(в)*. Исследуйте сходимость двух «экзотических» рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu(n)}{n^p} \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^{\,q}},$$

где $\nu(n)$ — число цифр в десятичном представлении номера n, а λ_n означает n-ый положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = x$.

4. Определите, сколько слагаемых в каждом из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

нужно взять, чтобы посчитать суммы этих рядов с точностью до 10^{-5}.

5*. Следующие две теоремы полезно учитывать при исследовании сходимости знакопеременных рядов и вычислении их сумм.

(а) Элементы ряда, не нарушая их порядка, сгруппировали так, что новый ряд получился сходящимся. При этом количество слагаемых в каждой группе ограничено некоторым общим для всех групп числом. Наконец, известно, что элементы исходного ряда стремятся к нулю. Докажите, что ряд сходится и его сумма равна сумме преобразованного ряда.

(б) Докажите, что сумма сходящегося ряда не изменится, если переставить его элементы, но таким образом, чтобы ни один из них не удалился от своего прежнего положения больше чем на m мест, где m — некоторое заранее заданное число.

6. Исследуйте условную и абсолютную сходимость рядов:

$$(\text{а})^*\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}; \qquad (\text{в})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}; \qquad (\text{д})\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p};$$

(б)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$; (г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$; (е) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[\sqrt{n}+(-1)^n]^p}$.

7*. Говорить, что «от перестановки мест слагаемых сумма не меняется», могут лишь те, кто не знает ряда Лейбница:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \ldots .$$

Докажите, что если элементы этого ряда переставить таким образом, чтобы группу p последовательных положительных его слагаемых сменяла очередная группа из q отрицательных элементов, то новый ряд окажется сходящимся и его суммой будет

$$\ln 2 \ + \ \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}.$$

А теперь переставьте местами слагаемые ряда Лейбница так, чтобы его сумма: удвоилась; утроилась; стала равной нулю.

Примечание. Чтобы облегчить себе работу, предварительно докажите асимптотическую формулу:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \ = \ C + \ln n + \varepsilon_n,$$

где C — некоторая постоянная величина, а $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Число $C = 0,5772...$ называется постоянной Эйлера. Как вы думаете, рациональное оно или нет? До сих пор этого не знает никто.

8. Бесконечные произведения. (а) Докажите тождества:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} \ = \ \frac{\sin x}{x}; \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} \ = \ \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$$

(б) Вычислите значения произведений:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n\,(n+1)}\right]; \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n\,(n+2)}\right].$$

(в) Найдите доказательства двух замечательных равенств:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \ = \ \frac{\pi}{2}; \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} \ = \ \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(г) Исследуйте сходимость бесконечных произведений:

$$(1)\quad \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}; \qquad (2)\quad \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n};$$

$$(3)\quad \prod_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}; \qquad (4)\quad \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n+(-1)^n}.$$

(д) Пусть $\beta_n > \alpha_n > 0$. Докажите эквивалентность условий:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n} = 0 \quad \text{и} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2\beta_n}{\alpha_n+\beta_n} = \infty.$$

(е)* Рассмотрим последовательность комплексных чисел z_n, представив их в полярной или тригонометрической форме:

$$z_n = r_n\, e^{i\varphi_n} = r_n\,(\cos\varphi_n + i\,\sin\varphi_n),$$

где $r_n > 0$, а $|\varphi_n| \le \pi$. Докажите, что для сходимости произведения чисел z_n необходимо и достаточно, чтобы сходились произведение их модулей r_n и ряд их аргументов φ_n. При этом

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n = r\, e^{i\varphi} = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi), \quad \text{где } r = \prod_{n=1}^{\infty} r_n \ \text{ и } \ \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n.$$

9. Найдите радиусы и опишите области сходимости комплексных степенных рядов:

$$(\text{а})\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, z^n; \qquad (\text{б})\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\, z^n; \qquad (\text{в})\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2^n\,(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p z^n;$$

$$(\text{г})\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n\, z^n}{(n+1)(n+2)}; \qquad (\text{д})\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, z^n}{(1+i)\,(1+2i)\,\ldots\,(1+ni)}.$$

10. (а) Вычислите сотые производные в нуле у функций:

$$(1)\quad \frac{x}{1+x-2x^2}; \qquad (2)\quad \frac{12-5x}{6-5x-x^2}.$$

(б) Пользуясь основными тейлоровскими разложениями, запишите следующие функции в виде сумм степенных рядов и укажите области, в которых действуют полученные вами формулы:

$$(1)\quad \frac{x}{\sqrt{1-2x}}; \qquad\qquad (3)\quad \frac{x\,\sin a}{1-2x\,\cos a+x^2};$$

$$(2)\quad \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}; \qquad\qquad (4)\quad \frac{x\,\mathrm{sh}\,a}{1-2x\,\mathrm{ch}\,a+x^2}.$$

(в) Применяя различные методы, найдите разложения еще нескольких функций, также указав допустимые значения переменной:

$$(1)\quad e^x\,\cos x; \qquad (3)\quad \mathrm{arctg}\,\frac{2x}{2-x^2}; \qquad (5)\quad \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt;$$

$$(2)\quad e^x\,\sin x; \qquad (4)\quad \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2; \qquad (6)\quad \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

11. Применяя дифференцирование, интегрирование и некоторые элементарные преобразования, найдите суммы степенных рядов:

$$(а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,x^n; \qquad (б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\,x^n}{n+1}; \qquad (в)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

12*. Матричная экспонента. В k-мерном арифметическом пространстве каждый линейный оператор A, как известно, можно представить в виде матрицы размера $k\times k$, которую мы будем обозначать той же буквой A. Если при этом элементы пространства записывать в виде k-мерных вектор-столбцов, то действие оператора A на элемент x сводится к умножению матрицы A на вектор-столбец x.

(а) Определим норму $||A||$ оператора или матрицы A, полагая

$$||A|| \;=\; \sup_{||x||=1}\,||A\,x||.$$

Докажите, что норма оператора в арифметическом пространстве всегда конечна. При этом

$$||A\,x|| \le ||A||\,||x|| \quad \text{для всех } x.$$

Докажите, что для любых двух линейных операторов A и B, действующих в одном пространстве, справедливы неравенства:

$$||A+B|| \leq ||A|| + ||B||, \qquad ||A\,B|| \leq ||A||\,||B||.$$

(б) Как отмечалось, множество всех матриц размера k, при желании, можно рассматривать как арифметическое пространство размерности k^2. И в этом смысле уже определены понятия сходимости последовательности матриц, а значит и суммы матричного ряда. Докажите, что поэлементная сходимость последовательности матриц A_n к матрице A равносильна сходимости по операторной норме: $||A_n - A|| \to 0$ при $n \to \infty$. Докажите, что сходимость числового ряда, составленного из норм $||A_n||$, гарантирует сходимость ряда из матриц A_n. При этом норма суммы не превосходит суммы норм.

(в) Экспонентой матрицы A называют сумму матричного ряда

$$e^A \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Убедитесь, что этот ряд действительно сходится, и докажите следующие два утверждения. Если матрицы A и B коммутируют, т. е. $AB = BA$, то их экспоненты e^A и e^B тоже перестановочны, причем $e^A\,e^B = e^{A+B} = e^B\,e^A$. Если матрицы A и B подобны, т. е. существует такое невырожденное линейное преобразование T, что $A = T\,B\,T^{-1}$, то и $e^A \;=\; T\,e^B\,T^{-1}$.

(г) Последнее утверждение показывает, что если вы научились считать экспоненты от клеток Жордана, то вы легко посчитаете экспоненту любой матрицы, которую вам удалось привести к нормальной жордановой форме. Вычислите матричную экспоненту произвольной клетки Жордана. Посчитайте экспоненты от матриц, соответствующих следующим преобразованиям плоскости: проектирование на ось абсцисс и на ось ординат, отражение относительно оси абсцисс и оси ординат, поворот на прямой угол по часовой стрелке и против нее.

(д) С каждым линейным оператором A свяжем однопараметрическое семейство преобразований

$$U(t) \;=\; e^{tA}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Эти операторы называют эволюционными. Причины такого названия прояснятся уже сейчас и еще более — в следующем разделе. Докажите, что построенные операторы образует группу. Точнее:

$$U(s+t) = U(s)\,U(t), \quad U(-t) = U(t)^{-1}, \quad U(0) = E,$$

где E означает единичную матрицу. Докажите, что группа $U(t)$ бесконечно дифференцируема по параметру t и

$$\frac{d}{dt}\,U(t) \;=\; A\,U(t) \;=\; U(t)\,A.$$

(е) Рассмотрим теперь систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\dot{x}_i \;=\; \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\,x_j, \qquad 1 \le j \le k.$$

Если из коэффициентов a_{ij} составить матрицу A, а все функции $x_i = x_i(t)$ собрать в единый вектор-столбец $x = x(t)$, система примет особенно привлекательную компактную форму: $\dot{x} = A\,x$.

Докажите, что решение $x = x(t)$ этой системы, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$, дается формулой $x(t) = U(t)\,x_0$.

Чтобы доказать его единственность, проверьте, что для произвольного решения $y = y(t)$ нашей системы производная вектор-функции $U(-t)\,y(t)$ тождественно равна нулю. Это значит, что $U(-t)\,y(t) \equiv U(0)\,y(0) = y(0)$, откуда $y(t) \equiv U(t)\,y(0) = x(t)$, если y, как и x, удовлетворяет условию $y(0) = x_0$.

(ж) Докажите, что для любой матрицы ее экспонента представляет собой невырожденную матрицу с положительным определителем. Докажите, что отвечающие матрице эволюционные операторы изометричны, а значит — являются вращениями, тогда и только тогда, когда матрица антисимметрична.

13. (а) Докажите, что дзета-функция Римана и тета-функция,

$$\zeta(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \qquad \text{и} \qquad \vartheta(x) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

бесконечно дифференцируемы всюду, где они определены: первая — при $x > 1$, вторая — при $x > 0$.

(б)* Рассмотрим последовательность всюду определенных бесконечно дифференцируемых функций φ_n от k вещественных переменных. Докажите, что можно подобрать настолько малые $\varepsilon_n > 0$, что ряд, составленный из функций $\varepsilon_n \varphi_n(x_1, \ldots, x_k)$, окажется сходящимся при всех $x_1, \ldots, x_k$ и его сумма будет иметь непрерывные частные производные любого порядка по всем наборам переменных.

(в)* С помощью этого утверждения докажите теорему Уитни: любое замкнутое множество в k-мерном арифметическом пространстве можно представить как множество нулей некоторой всюду определенной бесконечно гладкой функции от k переменных.

14. Представляя подынтегральные выражения в виде сумм подходящих функциональных рядов и опираясь на соответствующую теорему Лебега, «вычислите» следующие интегралы, выразив их через гамма-функцию Эйлера и дзета-функцию Римана:

$$\text{(а)} \quad \int_0^\infty \frac{x^n\,dx}{e^x - 1}; \qquad \text{(б)} \quad \int_0^\infty \frac{x^n\,e^x\,dx}{(e^x - 1)^2}; \qquad \text{(в)} \quad \int_0^\infty \frac{x^n\,dx}{e^x + 1}.$$

15. Частицы, рождаясь с одинаковой вероятностью в произвольных точках единичного шара, разлетаются по всем возможным направлениям и, достигая граничной сферы, поглощаются ею. Найдите среднюю длину свободного пробега частиц.

Задания по математическому анализу
составил профессор В. В. Иванов