Математический анализ

Вопросы к экзамену

1 семестр, ФФ НГУ, 2009 - 2010

Дорогие наши ученики! Вот и заканчивается ваш первый семестр в университете. Вы проделали огромную работу и многому научились. Мы, ваши преподаватели, рады были смотреть, с каким увлечением, с каким интересом вы трудились, как менялись на наших глазах, как взрослели... Уже очень скоро у вас наступят еще более радостные дни — долгожданная сессия! Соберитесь! Экзамен — это праздник! Это — торжественный и волнующий миг, как для студентов, так и для их преподавателей. Не омрачайте его! Блесните своими познаниями, поразите прочными навыками, заворожите грамотной и яркой речью! Удачи вам!

Ваш В. В. Иванов

***

Каждый билет содержит пять вопросов, призванных определить ваши теоретические знания по всем изученным темам анализа, и две задачи, из которых одну можно условно назвать *алгоритмической*, другую — *творческой*. Точнее говоря, структура билета такая:

1. Вопрос на тему *«Предел и непрерывность»*
2. Вопрос на тему *«Дифференцирование»*
3. Вопрос на тему *«Интегрирование»*
4. Вопрос на тему *«Дифференциальные уравнения»*
5. Вопрос на тему *«Функции нескольких переменных»*
6. Задача *«алгоритмического» характера*
7. Задача *«творческого» характера*

Чтобы не получить двойку, необходимо и достаточно ответить на все пять вопросов, *опуская доказательства*, которые от вас будут ждать только в двух из пяти вопросов, и решить *алгоритмическую* задачу. Точнее говоря, выполнение указанных условий гарантирует вам *удовлетворительный* итог. Можно надеяться, что такая наша предварительная договоренность позволит вам разумно распределить свои силы и время, сохранив спокойствие, уверенность и прекрасное настроение ...

Ниже приводятся полные перечни вопросов к экзамену по каждой из пяти указанных тем, а также списки задач из хорошо знакомых вам электронных задачничков, которыми вы пользовались в течение семестра, так что их адрес вы знаете:

http://www.phys.nsu.ru

В каждом билете каждому из вас лично будет ясно указано, что вам надо доказывать при вашем ответе, а что — нет. Задачи, разумеется, будут явно сформулированы в билете, так что вам не нужно иметь с собой компьютер.

На подготовку к ответу дается 60 минут. Если при ответе выясняется, что «троечный» уровень преодолен, студенту, если он того желает, дается еще 30-40 минут для завершения *требуемых от него доказательств* и решения *творческой* задачи. Отсутствие новых достижений на этом этапе не отменяет уже достигнутого студентом «международного» уровня. Вот и все правила.

1. Предел и непрерывность

1. Приведите определения точных границ числового множества. Сформулируйте теорему Дедекинда о полноте числовой прямой и, опираясь на нее, докажите теорему о существовании точных границ.

2. Предел последовательности — определения для случаев конечного и бесконечных пределов обоих знаков, примеры на каждый случай. Порядковые свойства предела последовательности.

3. Предел последовательности — определения для случаев конечного и бесконечных пределов обоих знаков, примеры на каждый случай. Арифметические свойства предела последовательности.

4. Монотонные последовательности — определение, примеры. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Приложение: принцип вложенных отрезков.

5. Подпоследовательности и частичные пределы — определения, примеры. Теорема Больцано — Вейерштрасса о частичных пределах.

6. Последовательности, удовлетворяющие условию Коши — определение. Критерий Коши сходимости последовательности.

7. Точка сгущения числового множества и предел функции в такой точке — определения для случаев конечного и бесконечных пределов обоих знаков, примеры на каждый случай.

8. Точка, в которой числовое множество сгущается с той или иной стороны, и соответствующий односторонний предел функции в такой точке — определения для случаев конечного и бесконечных пределов обоих знаков, примеры на каждый случай.

9. Предел функции одной переменной, когда ее аргумент стремится к той или иной бесконечности, — определения для случаев конечного и бесконечных пределов обоих знаков, примеры на каждый случай.

10. Подход Гейне к понятию предела функции одной переменной, его эквивалентность подходу Коши.

11. Арифметические свойства предела функции одной переменной. Для ответа выберете один из пяти обсуждавшихся в курсе вариантов поведения аргумента функции.

12. Порядковые свойства предела функции одной переменной. Для ответа выберете один из пяти обсуждавшихся в курсе вариантов поведения аргумента функции.

13. Критерий Коши существования конечного предела функции одной переменной. Для ответа выберете один из пяти обсуждавшихся в курсе вариантов поведения аргумента функции.

14. Монотонные функции — определения, примеры. Теорема об односторонних пределах монотонной функции. Рассмотрите оба типа монотонности.

15. Теорема Больцано — Коши о промежуточном значении непрерывной функции одной переменной.

16. Признак непрерывности монотонной функции и теорема об обратной функции.

17. Теорема Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях непрерывной на отрезке функции.

18. Равномерная непрерывность функции — определение для функций одной переменной, примеры непрерывных, но не равномерно непрерывных функций. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

2. Дифференцирование

1. Производная функции одной переменной — определение, геометрический смысл, физическая интерпретация. Арифметические правила дифференцирования.

2. Производная функции одной переменной — определение, геометрический смысл, физическая интерпретация. Дифференцирование сложной и обратной функции.

3. Первый замечательный предел и производные тригонометрических функций, прямых и обратных. Здесь вы вправе пользоваться непрерывностью элементарных функций, не устанавливая этого факта.

4. Второй замечательный предел и производные показательных, логарифмических и степенных функций. Здесь вы вправе пользоваться непрерывностью элементарных функций, не устанавливая этого факта.

5. Производные параметрически заданных функций — приведите формулы для первой и второй производных, докажите их. Дифференцирование неявно заданных функций — расскажите, как это делается, приведите примеры.

6. Теорема Ферма о производной в точке экстремума, ее применение к поиску наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции.

7. Теорема Ролля о нуле производной, теоремы Лагранжа и Коши о конечных приращениях.

8. Условия монотонности и строгой монотонности дифференцируемой функции.

9. Локальные экстремумы функции одной переменной — определения, примеры. Стационарные, или критические, точки и необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума в терминах первой производной.

10. Локальные экстремумы функции одной переменной — определения, примеры. Анализ невырожденных критических точек, или достаточное условие экстремума в терминах второй производной.

11. Выпуклые функции. Признаки выпулости в терминах первой и второй производных. Точки перегиба и как их найти. Неравенство Иенсена и примеры его приложений.

12. Первое правило Бернулли — Лопиталя: формулировка, доказательство, примеры применения для разных типов предельных переходов.

13. Второе правило Бернулли — Лопиталя: формулировка, доказательство, примеры применения для разных типов предельных переходов.

14. Символы «o-малое» и «O-большое». Лемма о порядке бесконечно малой дифференцируемой функции. Полином Тейлора. Локальная формула Тейлора — запишите ее и докажите.

15. Запишите и докажите асимптотические формулы произвольного порядка для функций $e^x,\ \sin x,\ \cos x,\ \ln(1+x)$ и $(1+x)^\mu$ при малых значениях аргумента x.

16. Техника асимптотических разложений: арифметические действия с асимптотическими формулами, разложения сложной и обратной функций, дифференцирование и интегрирование асимптотических формул.

17. Ряд Тейлора бесконечно гладкой функции — определение, условие представимости функции ее рядом Тейлора. Формы Лагранжа и Коши тейлоровского остатка. Разложения в степенные ряды экспоненты, синуса и косинуса.

12. Ряд Тейлора бесконечно гладкой функции — определение, условие представимости функции ее рядом Тейлора. Формы Лагранжа и Коши тейлоровского остатка. Разложения в степенные ряды логарифма (логарифмический ряд) и общей степенной функции (биномиальный ряд Ньютона).

18. Предел, непрерывность и производная вектор-функции скалярного аргумента. Правила дифференцирования скалярного, векторного и смешанного произведений переменных векторов.

19. Кривизна дважды гладкой линии — определение, формулы для естественной и произвольной параметризаций. Выражение кривизны в координатах. Кривизна графика дважды гладкой функции.

20. Кручение трижды гладкой линии — определение, формулы для естественной и произвольной параметризаций. Выражение кручения в координатах.

21. Формулы Френе — напишите их и докажите. Представьте их в красивой единообразной форме с помощью вектора мгновенной угловой скорости сопровождающего репера. Как выглядят формулы Френе, когда линия плоская?

22. Векторная версия формулы Тейлора и локальное строение трижды гладкой линии. Соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая плоскости. Проекции линии на эти плоскости: асимптотические формулы, их доказательства, рисунки.

3. Интегрирование

1. Первообразная — определение, примеры. Описание множества первообразных функции на заданном промежутке. Неопределенный интеграл. Таблица интегралов.

2. Два метода вычисления неопределенных интегралов — формула интегрирования по частям и формула замены переменной. Приведите примеры их применения.

3. Интегрирование рациональных функций — расскажите, что такое простейшие дроби, как разлагается правильная рациональная функция в сумму простейших дробей, что такое метод неопределенных коэффициентов, посчитайте интегралы простейших дробей.

4. Метод Остроградского выделения рациональной части интеграла — опишите его и проиллюстрируйте его действие на конкретном примере.

5. Классические примеры «рационализации» инртегралов: дробно-линейные иррациональности, квадратичные иррациональности и подстановки Эйлера, биномиальные дифференциалы и три интегрируемых случая Чебышёва, рационально-тригонометрические выражения и «тангенс половинного угла».

6. Конструкция определенного интеграла Римана — интегральные суммы, их сходимость. Основные свойства интеграла — линейность, аддитивность, монотонность.

7. Взвешенное среднее. Интегральная теорема о среднем.

8. Построение первообразной с помощью определенного интеграла. Формула Ньютона — Лейбница.

9. Два метода вычисления определенных интегралов — формула интегрирования по частям и формула замены переменной. Приведите примеры их применения.

10. Интегральная форма тейлоровского остатка. Опираясь на интегральную теорему о среднем, получите из нее «остаточные» формулы Лагранжа и Коши.

11. Несобственные интегралы — дайте определения, распространите на несобственные интегралы формулу Ньютона — Лейбница, формулу интегрирования по частям и формулу замены переменной.

12. Критерий Коши и признак Вейерштрасса сходимости несобственного интеграла.

13. Условия сходимости и расходимости интеграла в случае, когда функция имеет степенную особенность — рассмотрите варианты с конечной и бесконечно удаленной особой точкой.

14. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственного интеграла. Пример: сходимость интеграла Дирихле.

15. Гамма-функция Эйлера: определение, область сходимости интеграла, определяющего гамма-функцию, формула понижения, формула дополнения, значения гамма-функции для целых и полуцелых значений аргумента, график гамма-функции, формула Стирлинга.

16. Бета-функция Эйлера: определение, область сходимости интеграла, определяющего бета-функцию, представление несобственным интегралом по положительной полупрямой, выражение бета-функции через гамма-функцию.

17. Геометрические приложения интеграла: длина параметрически заданной гладкой линии, длина плоской линии, заданной в полярных координатах или в виде графика гладкой функции, площади подграфика и криволинейного сектора, площадь поверхности вращения и объем тела вращения.

18. Механические иллюстрации к теории интеграла: масса и линейная плотность стержня, статические моменты относительно заданной точки и центр масс, момент инерции, векторный интеграл и сила, с которой массивный стержень притягивает материальную точку.

4. Дифференциальные уравнения

1. Расскажите, как решаются дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Не забудьте про тривиальные, но очень важные, стационарные решения. Как ставится для этих уравнений задача Коши? Как найти решение с заданными начальными условиями?

2. Расскажите, как принято решать однородные дифференциальные уравнения. Не забудьте про тривиальные, но очень важные, однородные решения. Как ставится для этих уравнений задача Коши? Как найти решение с заданными начальными условиями?

3. Расскажите, как решаются методом «вариации постоянной» линейные дифференциальные уравнения первого порядка, а именно — уравнения вида

$$\dot{x} = ax + b$$

с непрерывными переменными коэффициентами a и b. Как ставится для этих уравнений задача Коши? Как найти решение с заданными начальными условиями?

4. Комплексная экспонента — определение, показательное свойство экспоненты. Чему равен модуль числа $e^{i\varphi}$ при вещественном φ? Правило дифференцирования по t функции $z = e^{\lambda t}$ с произвольным комплексным коэффициентом λ. Какому дифференциальному уравнению удовлетворяет эта функция?

5. Факторизация линейного дифференциального оператора второго порядка с постоянными коэффициентами. Расскажите, как решить методом факторизации дифференциальное уравнение

$$\ddot{z} + a\dot{z} + bz = f(t)$$

с постоянными коэффициентами a и b и произвольной правой частью $f(t)$, определенной и непрерывной на некотором числовом интервале. Как ставится для такого уравнения задача Коши? Как найти решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям?

6. Найдите общий вид комплексных решений однородного уравнения

$$\ddot{z} + a\dot{z} + bz = 0$$

с постоянными комплексными коэффициентами a и b. Рассмотрите два принципиально разных случая, а именно: когда характеристический многочлен имеет два разных корня и когда он имеет один двукратный корень.

7. Найдите общий вид вещественных решений уравнения свободных колебаний

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

с постоянными вещественными коэффициентами a и b. Покажите, что здесь логически возможны ровно три принципиально разных случая, а именно: когда характеристический многочлен имеет два разных вещественных корня, когда он имеет один вещественный двукратный корень и когда у него два комплексно-сопряженных невещественных корня. Изучите каждый из этих случаев.

8. Найдите частное комплексное решение неоднородного уравнения

$$\ddot{z} + a\dot{z} + bz = C_0 e^{\lambda_0 t}$$

с постоянными комплексными коэффициентами a и b, выразив его через коэффициенты C_0 и λ_0. Рассмотрите три принципиально разных случая, а именно: когда λ_0 не является корнем характеристического многочлена, когда λ_0 служит простым его корнем и когда — корнем кратности два.

9. Методом комплексной амплитуды найдите частное вещественное решение уравнения вынужденных колебаний

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = e^{\sigma_0 t}(A_0 \cos\omega_0 t + B_0 \sin\omega_0 t)$$

с постоянными вещественными коэффициентами a и b в левой части и вещественными параметрами σ_0, A_0 и B_0 «силовой» функции справа. Как и в комплексной версии задачи, вам придется рассмотреть здесь три варианта взаимоотношений левой и правой частей уравнения.

10. Методом комплексной амплитуды проведите подробное исследование гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega^2 x = r_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

находящегося под действием гармонической силы. Найдите общее решение этого уравнения, различая три случая: (1) $\omega < \omega_0$, (2) $\omega > \omega_0$ и (3) $\omega = \omega_0$.

11. Фазовая плоскость и фазовые траектории одномерной консервативной системы Ньютона. Потенциальная, кинетическая и полная энергии — определения. Закон сохранения полной энергии — формулировка, доказательство.

12. Расскажите, как строится и как выглядит фазовый портрет одномерной консервативной системы Ньютона около невырожденной неподвижной точки. Рассмотрите отдельно устойчивое и неустойчивое положения равновесия. Нарисуйте ответы.

13. Расскажите, как строится и как выглядит фазовый портрет одномерной консервативной системы Ньютона, если график потенциальной энергии имеет: (1) один минимум слева и один максимум справа; (2) один максимум слева и один минимум справа.

14. Расскажите, как строится и как выглядит фазовый портрет одномерной консервативной системы Ньютона если график потенциальной энергии имеет: (1) один минимум и два максимума; (2) два минимума и один максимум.

5. Функции нескольких переменных

1. Линейная структура арифметического пространства. Скалярное произведение, его свойства, неравенство Коши — Буняковского. Норма = длина вектора, свойства нормы. Метрика, или расстояние между точками, свойства метрики.

2. Сходимость последовательности в арифметическом пространстве. Эквивалентность сходимости по норме и покоординатной сходимости. Многомерные версии критерия Коши и теоремы Больцано — Вейерштрасса.

3. Основные топологические понятия: внутренние точки и внутренность множества, точки прикосновения и замыкание множества, граничные точки и граница множества, открытые и замкнутые множества, допустимые операции над ними, связь между классами открытых и замкнутых множеств.

4. Предел и непрерывность отображений арифметических пространств — подходы Коши и Гейне, их эквивалентность, связь с пределами и непрерывностью координатных функций. Теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями и о суперпозиции непрерывных отображений.

5. Теоремы о непрерывных прообразах открытых и замкнутых множествах. Топологические свойства лебеговских множеств непрерывных функций, или множеств, определяемых строгими и нестрогими неравенствами.

6. Компактные множества в арифметических пространствах. Критерий компактности. Непрерывные образы компактных множеств. «Многомерная» теорема Вейерштрасса о наименьшем и наибольшем значениях непрерывной функции.

7. Связные множества в арифметических пространствах. Критерий связности на числовой прямой. Непрерывные образы связных множеств. «Многомерная» теорема Больцано — Коши о промежуточных значениях непрерывной функции.

8. Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных. Выражение дифференциала через частные производные. Арифметические правила вычисления частных производных и дифференциалов.

9. Гладкие, или непрерывно дифференцируемые, функции нескольких переменных. Теорема о выделении линейной части приращения, или о дифференцируемости гладкой функции.

10. «Цепное правило», или дифференцирование сложной функции нескольких переменных. Инвариантность формы первого дифференциала. Пример: однородные функции и тождество Эйлера.

11. Производная по вектору, ее существование в случае гладкой функции и выражение через частные производные. Градиент — определение и геометрическая характеристика его величины и направления.

12. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Теорема о симметричности смешанных производных.

13. Значения дифференциалов любых порядков на данном векторе как результат кратного дифференцирования функции по этому вектору. «Многомерная» формула Тейлора.

14. Точки локального экстремума функции нескольких переменных. Критические, или стационарные, точки гладкой функции и первое необходимое условие экстремума. Второе необходимое условие экстремума в терминах второго дифференциала. Знакопеременные квадратичные формы и признак отсутствия экстремума.

15. Оценка положительно определенной квадратичной формы и достаточное условие локального экстремума функции нескольких переменных. Пример: исследование невырожденной критической точки функции двух переменных.

6. «Условно-алгоритмические» задачи

Задачу назовем *условно-алгоритмической*, если она входит в состав следующего подмножества хорошо известного вам перечня обязательных задач из восьми горячо любимых вами заданий, с которыми вы блестяще справились.

[1]: 8, 24, 28, 30, 41.

[2]: 6, 22, 23, 24, 29, 33.

[3]: 24, 40, 52, 54, 78.

[4]: 7(б, в), 10, 17, 29, 33, 34(а), 36(г), 37(б, в), 38(б, г, е), 39(б, г).

[5]: 4, 9, 14, 21, 78, 79, 85, 86, 107.

[6]: 36(г), 37(г), 39(б), 43(в), 54(б), 55(б), 57(г, д), 100(г).

[7]: 4(в), 15(г, е), 16(е), 20(г), 21(а), 29(б, е), 31, 34(в), 77.

[8]: 1, 2, 3, 4, 8(б, в), 10.

7. «Условно-творческие» задачи

Задачу назовем *условно-творческой*, если она входит в состав следующего подмножества хорошо известного вам перечня обязательных задач из восьми упомянутых выше заданий.

[1]: 9, 15, 31, 33, 42.

[2]: 7, 25, 26, 31.

[3]: 12, 18, 28, 42, 49, 79, 80.

[4]: 23, 25, 40, 52, 60, 69, 71.

[5]: 7. 17, 80, 87, 88, 108.

[6]: 14(б), 23(в), 33, 60(г), 83, 91, 96(в), 97(в), 104(а), 105(б), 106(а).

[7]: 8, 10, 12(б), 17, 22(в), 58, 64, 73.

[8]: 5, 6, 7, 8(г), 9, 12(а, б, в).

Образец билета

1. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях непрерывной на отрезке функции.

2. Теорема Ролля о нуле производной, теоремы Лагранжа и Коши о конечных приращениях. Сформулируйте и докажите эти теоремы.

3. Два метода вычисления неопределенных интегралов — формула интегрирования по частям и формула замены переменной. Сформулируйте соответствующие теоремы и приведите примеры их применения.

4. Найдите частное комплексное решение неоднородного уравнения

$$\ddot{z} + a\dot{z} + bz = C_0 e^{\lambda_0 t}$$

с постоянными комплексными коэффициентами a и b, выразив его через коэффициенты C_0 и λ_0. Рассмотрите три принципиально разных случая, а именно: когда λ_0 не является корнем характеристического многочлена, когда λ_0 служит простым его корнем и когда — корнем кратности два.

5. Оценка положительно определенной квадратичной формы и достаточное условие локального экстремума функции нескольких переменных. Сформулируйте и докажите соответствующие утверждения. В качестве примера проведите исследование невырожденной критической точки функции двух переменных.

6. Посчитайте неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

7. Пусть $x > 0$ и $y > 0$, причем $x \neq y$. Докажите, что в таком случае

$$\frac{x\ln x + y\ln y}{x+y} > \ln\frac{x+y}{2}.$$

P. S. Невозможно не выяснить, что будет, если, все-таки, числа x и y равны...

Образец ответа

Место действия — одна из аудиторий НГУ, время — посленовогодняя сессия. Действующие лица — *Экзаменатор* и *Студент*. Поскольку один звучит как *Инквизитор*, а другой — как-то *Безлико-Безымянно*, назовем их. Итак, экзаменатор — *Матаник*, студент — *Василий*.

Василий: Здравствуйте! Можно Вам сдать?

Матаник: Здравствуйте! Значит, сдать пришли? А что у Вас?

Василий: Нууу, билет.

Матаник: Билет хотите сдать? Нет? Присаживайтесь. Говорите!

Василий: Нууу, в общем, здесь теорема Вейерштрасса.

Матаник: У Вейерштрасса много одноименных теорем. У Вас-то какая?

Василий: Давайте я просто расскажу все по порядку! Имеется в виду теорема о наименьшем и наибольшем значениях.

Т е о р е м а. *Среди значений функции, определенной и непрерывной на отрезке числовой прямой, есть наименьшее и наибольшее.*

Матаник: Хорошо, даже очень, но уж больно лаконично. Нельзя ли подробнее?

Василий: Отчего же нет? Пожалуйста. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $a \le x \le b$. Тогда в этом отрезке найдутся такие точки x' и x'', что $f(x') \le f(x) \le f(x'')$ для всех точек x того же отрезка.

Матаник: А нельзя ли в условиях теоремы *отрезок* заменить произвольным ограниченным промежутком, например, *интервалом*?

Василий: Можно. Только утверждение теоремы придется отменить. Привести примеры?

Матаник: Вижу, что приведете. Тем не менее, теперь, когда Вы начали изучать многомерные пространства и функции нескольких переменных, скажите, что́ главное с точки зрения нашего вопроса отличает отрезок от прочих промежутков?

Василий: Важна его *компактность*.

Матаник: Да, это так! Что скажете по второму вопросу?

2. *Василий*: Теорема Ролля — это следующее утверждение.

Т е о р е м а. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $a \le x \le b$ и дифференцируема в каждой точке интервала $a < x < b$. Если при этом оказалось, что $f(a) = f(b)$, то строго между a и b найдется хотя бы одна точка c, в которой $f'(c) = 0$.*

Матаник: Как Вы думаете, есть ли «механический» смысл в этой теореме?

Василий: Да, конечно! Если точка движется, скажем, по прямой линии, в каждый момент имея определенную скорость, и завершает свое путешествие в том же месте, где его начала, то в какой-то момент она должна была, хоть на мгновение, остановиться. Это очевидно.

Матаник: Замечательно! Но я должен напомнить, что у Вас еще будет время, чтобы подумать о доказательстве.

Василий: Спасибо, но я готов изложить его.

Доказательство. В силу теоремы Вейерштрасса, о которой мы только что говорили, в отрезке, где задана функция f, найдутся две точки c' и c'', в которых она принимает соответственно наименьшее и наибольшее из своих значений. Если обе эти точки оказались на границе отрезка, то в любом случае $f(c') = f(c'')$, благодаря условию $f(a) = f(b)$. Иными словами, наименьшее и ниабольшее значения функции f совпадают. Это значит, что функция постоянна, а тогда ее производная всюду равна нулю — вопрос исчерпан. Если же хоть одна из точек c' и c'' расположена строго между a и b, то, согласно теореме Ферма о производной в точке экстремума, производная функции f в такой точке равна нулю. Теорема доказана.

Теперь — теорема Лагранжа. Как говорил Феликс Клейн, одна из важнейших заслуг Коши заключается в том, что он поставил теорему Лагранжа в центре построения анализа.

Т е о р е м а. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $a \le x \le b$ и дифференцируема в каждой точке интервала $a < x < b$. Тогда строго между a и b найдется хотя бы одна такая точка c, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Доказательство. Рассмотрим «вспомогательную» функцию

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

которая определена, как и $f(x)$, на отрезке $a \le x \le b$, непрерывна на нем и обладает производной в каждой внутренней его точке. При этом, как легко видеть, $h(a) = h(b)$. Согласно теореме Ролля строго между a и b найдется точка c, в которой $h'(c) = 0$. Нам осталось заметить, что

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Теорема доказана.

Матаник: Что же Вы такое сделали с функцией f, заменив ее на h? И в чем смысл теоремы, которую Вы доказали вслед за Лагранжем?

Василий: Это очень просто. Геометрически теорема утверждает, что при оговоренных в ней условиях на графике функции f найдется такая точка $(c, f(c))$, в которой касательная, имеющая наклон $f'(c)$, параллельна хорде, соединяющей концы графика, а именно: точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Вот мы и «наклонили» график так, чтобы в результате его концы оказались на одной «высоте», как у Ролля.

Матаник: Слушать Вас — одно удовольствие. Продолжайте.

Василий: Теорема Коши, о которой теперь пойдет речь, звучит следующим образом.

Т е о р е м а. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $a \le x \le b$ и дифференцируемы в каждой точке интервала $a < x < b$, причем у второй из них производная отлична от нуля. Тогда, во-первых, $g(b) \ne g(a)$, а во-вторых, строго между a и b найдется такая точка c, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. То, что $g(b) \ne g(a)$, вытекает прямо из теоремы Ролля. Как и в предыдущем случае, рассмотрим «вспомогательную» функцию $h(x)$, только построим ее иначе:

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Она определена, как $f(x)$ и $g(x)$, на отрезке $a \le x \le b$, непрерывна на нем и обладает производной в каждой внутренней его точке. При этом, как легко видеть, и здесь $h(a) = h(b)$, так что, согласно все той же теореме Ролля, строго между a и b найдется точка c, в которой $h'(c) = 0$. Остается заметить, что

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c).$$

Теорема доказана.

Матаник: Хорошо. Давайте немного обсудим эти три теоремы. Что Вы можете сказать о связи между ними?

Василий: С одной стороны, как мы видели, теоремы Лагранжа и Коши легко выводятся из теоремы Ролля. В свою очередь, теорема Ролля — частный случай теоремы Лагранжа: достаточно в последней дополнительно предположить, что $f(a) = f(b)$. Если же в теореме

Коши взять $g(x) \equiv x$, получится теорема Лагранжа. Таким образом, в каком-то смысле эти три теоремы эквивалентны. Но, все же, если теорема Ролля самая простая из них, а теорема Коши самая общая, то теорема Лагранжа — самая красивая!

Матаник: Безусловно! К тому, что Вы сказали, можно лишь добавить, что теоремы Лагранжа и Коши на самом деле выражают одно и тоже — надо только график задать параметрически... Но сейчас не время говорить об этом.

Василий: Ой! А можно поговорить? На лекциях этого не было...

Матаник: Хорошо! Пусть $\alpha = g(a)$ и $\beta = g(b)$. Нетрудно понять, что функция g, чья производная отлична от нуля, взаимно однозначна, а обратная к ней функция определена на отрезке с концами α и β, непрерывна на нем и внутри него дифференцируема. Разумеется, здесь кое-что нужно обосновать, но мы же сейчас просто беседуем... Итак, что дальше? Можете продолжить?

Василий: Кажется, я понял. «Сложная» функция $\varphi(t) := f(g^{-1}(t))$, определенная для всех t от α до β, удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, так что строго между α и β найдется такая точка τ, что

$$\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = \varphi'(\tau)\,(\beta - \alpha).$$

Полагая $c := g^{-1}(\tau)$, заметим, что $a < c < b$, а предыдущее равенство может быть представлено так:

$$f(b) - f(a) = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,(g(b) - g(a)),$$

что мы и стремились получить!

Матаник: Я очень рад — Вы просто молодец! Итак, вопрос третий.

3. *Василий*: Мой небольшой опыт первокурсника приводит меня к такой картине: если дифференцирование элементарной функции — алгоритмическая задача и дело ремесла, то решение обратной задачи — вычисление первообразной — исключительно тонкое искусство и дело мастера. Интегрирование по частям — замечательный вспомогательный прием. Я слышал, что иные посвящают все свое творчество приложениям этого метода... Удачная замена переменной — это правильный взгляд на задачу. Он всегда рядом, но не виден почти никому. Надо учиться у классиков...

Матаник (подняв брови): Что это с Вами? А стихами можете?

Василий (смутившись): Ой, извините! Задумался... Речь идет о двух формулах. Одна из них — формула интегрирования по частям. Если функции $u = u\,(x)$ и $v = v\,(x)$ определены и дифференцируемы на каком-то числовом промежутке, мы полагаем для краткости

$$\int u\,dv := \int u\,(x)\,v'(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int v\,du := \int v\,(x)\,u'(x)\,dx.$$

Как показывает теорема о дифференцировании произведения функций, если один из этих интегралов существует, то обязательно существует и другой из них, причем

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Это соотношение и называют формулой интегрирования по частям. Она позволяет при вычислении интеграла заменить его другим, который нередко оказывается более простым.

Матаник: Это верно, но где Вы здесь видите «части»? А если видите, то части *чего*?

Василий: Так Вы сами нам говорили! Дело в том, что дифференциальное выражение $f(x)\,dx$ почти никогда изначально не бывает заданным в виде $u(x)\,dv(x) = u(x)\,v'(x)\,dx$, и задача каждый раз состоит как раз в том, чтобы удачно разложить функцию $f(x)$ в произведение $u(x)\,w(x)$ и для множителя $w(x)$ найти первообразную $v(x)$, или, иными словами, вычислить интеграл:

$$v = \int w(x)\,dx.$$

Теперь, когда проинтегрирована «мультипликативная часть» $w(x)$ функции $f(x)$, мы получаем нужное нам представление $f(x)\,dx = u(x)\,dv(x)$, приводящее нашу задачу к интегрированию выражения $v(x)\,u'(x)\,dx$. Вот прекрасный пример:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C.$$

Матаник: Да, пример хороший. Убедительный. А что с заменой переменной?

Василий: Зная первообразную $F(x)$ той или иной функции $f(x)$, мы легко можем составить с ее помощью бесконечную таблицу новых интегралов. А именно, подставляя вместо x какую угодно дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, мы получим «сложную» функцию $F(\varphi(t))$, у которой производная по переменной t равна

$$\frac{d}{dt}\,F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Это значит, что функция $F(\varphi(t))$ служит первообразной для функции $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, или, иными «словами»,

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C.$$

На этом пути действительно можно найти немало интересных интегралов, и классики не пренебрегали такой возможностью. Но более актуальной обычно бывает обратная задача: мы не знаем интеграла функции $f(x)$, но хотим его найти. Метод замены переменной заключается в том, чтобы подыскать такую удачную подстановку $x = \varphi(t)$, для которой удалось бы вычислить интеграл

$$\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \Phi(t) + C.$$

Тогда, если существует обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$ и она дифференцируема, нам остается подставить последнее выражение в функцию $\Phi(t)$. В результате, как легко убедиться прямым дифференцированием, мы получим искомую первоообразную функции $f(x)$. Таким образом,

$$\int f(x)\,dx = \Phi(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

В качестве примера рассмотрим интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.$$

Разумеется, проверить это равенство можно простым дифференцированием. Но сейчас мы хотим показать, как можно было получить эту формулу, не зная ответа заранее, и посмотреть, как работает формула замены переменной. Здесь тот случай, когда полезны гиперболические функции. А именно, положим $x = \operatorname{sh} t$. Тогда $dx = \operatorname{ch} t\, dt$ и $\sqrt{x^2+1} = \operatorname{ch} t$, так что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int dt = t + C = \operatorname{arsh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.$$

Матаник: Восхитительно! Так, а что у Вас там дальше в билете? Дифуры? Колебания? Комплексные? Разве колебания могут быть комплексными? Ну и делааа... Рассказывайте!

4. *Василий*: Колебания-то реальные, а вот проще всего описываются ... комплексными числами. Загадка, однако! Словом, вопрос четвертый.

Пусть D означает дифференциальный оператор второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами a и b, действующий на любую дважды дифференцируемую функцию u по правилу $D(u) = \ddot{u} + a\,\dot{u} + b\,u$. С каждым таким оператором полезно связать его характеристический многочлен $p(\lambda) = \lambda^2 + a\,\lambda + b$. Легко проверить следующие три формулы:

(а) $D(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t}\, p(\lambda)$;

(б) $D(t\, e^{\lambda t}) = e^{\lambda t}\, [t\, p(\lambda) + p'(\lambda)]$;

(в) $D(t^2\, e^{\lambda t}) = e^{\lambda t}\, [t^2\, p(\lambda) + 2tp\,'(\lambda) + p\,''(\lambda)]$.

Приступая теперь к анализу нашего комплексного уравнения $D(z) = C_0 e^{\lambda_0 t}$, заметим, что вид его решений существенно зависит от взаимоотношений параметра λ_0 с корнями λ_1 и λ_2 характеристического многочлена p оператора D.

1-й случай. Пусть $\lambda_0 \neq \lambda_1$ и $\lambda_0 \neq \lambda_2$. Иначе говоря, λ_0 не является корнем для p, так что $p(\lambda_0) \neq 0$. Как показывает приведенная выше формула (а), одним из решений z_* нашего уравнения в этом случае будет функция

$$z_* = C\, e^{\lambda_0 t}, \quad \text{где} \quad C = \frac{C_0}{p(\lambda_0)}.$$

2-й случай. Пусть $\lambda_0 = \lambda_1$, но $\lambda_0 \neq \lambda_2$. Это значит, что λ_0 служит простым корнем многочлена p, так что $p(\lambda_0) = 0$, но $p'(\lambda_0) \neq 0$. Согласно формуле (б) в этом случае одним из решений z_* нашего уравнения будет функция

$$z_* = C\, t\, e^{\lambda_0 t}, \quad \text{где} \quad C = \frac{C_0}{p'(\lambda_0)}.$$

3-й случай. Пусть $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$. Иначе говоря, λ_0 является кратным корнем многочлена p, так что $p(\lambda_0) = p'(\lambda_0) = 0$. Между тем, как можно заметить, $p''(\lambda_0) \neq 0$. Присмотревшись теперь к формуле (в), мы видим, что в этом исключительно редком случае, представляющем разве что академический интерес, одним из решений z_* нашего уравнения будет функция

$$z_* = C\, t^2\, e^{\lambda_0 t}, \quad \text{где} \quad C = \frac{C_0}{p''(\lambda_0)} = \frac{C_0}{2}.$$

Мы рассмотрели все логически возможные варианты и для каждого из них явно указали конкретное решение интересующего нас неоднородного уравнения. Чтобы получить все его решения, нужно лишь прибавить к найденному общее решение соответствующего однородного уравнения. Вот и вся задача. А комплексная экспонента — это здорово!

Матаник: Вы так чудесно все рассказали, что у меня, пожалуй, нет вопросов. А вот у Вас есть — вопрос пятый...

5. *Василий*: С этим трудно не согласиться, но я готов поговорить про экстремумы функций нескольких переменных, «многомерного» Тейлора, компакты и квадратичные формы. Отметим прежде всего следующее совершенно замечательное утверждение.

Теорема. *Если квадратичная форма q от n переменных положительно определена, а это значит, что $q(v) > 0$ для каждого отличного от нуля n-мерного вектора v, то можно указать такое положительное число σ, что $q(v) \geq \sigma \|v\|^2$ для любого вектора v.*

Доказательство. Стандартная сфера S в n-мерном арифметическом пространстве, состоящая из всех векторов u с нормой $\|u\| = 1$, компактна, а квадратичная форма q непрерывна. Согласно многомерной версии теоремы Вейерштрасса, найдется такой вектор $u_0 \in S$, что $q(u) \geq q(u_0)$ для всех $u \in S$. Положим $\sigma := q(u_0)$ и заметим, что $\sigma > 0$, поскольку $u_0 \neq 0$. Если теперь $v \neq 0$, то вектор $u := v/\|v\|$ имеет единичную длину, а значит, $q(u) \geq \sigma$. Нужная нам оценка вытекает теперь из очевидного равенства $q(u) = q(v)/\|v\|^2$. При $v = 0$ комментарии вряд ли нужны. Теорема доказана.

Матаник: Извините, пожалуйста, что перебиваю Вашу пламенную речь, но с чего Вы взяли, что сфера компактна?

Василий: Так она ограничена и замкнута!

Матаник: Да, пожалуй, ограничена. А замкнута почему?

Василий: Вы же сами рассказывали! Забыли? Ой, извините! Можно сослаться на теорему о топологических свойствах множеств Лебега, определяемых непрерывными функциями. Но если бы и не было у нас такой теоремы, мы доказали бы это прямо. Хотите, докажу?

Матаник: Хочу! Посмотреть хочу, как Вы это делаете...

Василий: Рассмотрим последовательность $x_k \in S$ и предположим, что она сходится к какой-то точке x. Нам нужно доказать, что $x \in S$. Это и будет означать замкнутость сферы. Но это просто: как вытекает из неравенства треугольника, абсолютная величина разности $\|x_k\| - \|x\|$ не превосходит $\|x_k - x\|$, откуда следует, что

$$\|x\| = \lim_k \|x_k\| = 1.$$

Матаник: Да, все верно. Можно и так. Как Вы думаете, а может и не нужна вовсе упомянутая Вами топологическая теорема?

Василий: Как не нужна? Она же проясняет суть! А в более сложных случаях без нее и вовсе не обойтись. Точнее, каждый раз пришлось бы, по-существу, передоказывать ее. Например, в случае сферы мы воспользовались непрерывностью нормы, вытекающей из неравенства треугольника. Нет, что Вы! Топология нам еще как нужна! Идем дальше, по билету.

Теорема. *Пусть D означает открытое множество в n-мерном арифметическом пространстве, а f — дважды гладкую функцию на нем. Рассмотрим точку $x_0 \in D$, где $df(x_0) = 0$. Если квадратичная форма $d^2 f(x_0)$ положительно определена, то функция f имеет в точке x_0 строгий локальный минимум. Если же форма $d^2 f(x_0)$ отрицательно определена, то x_0 служит точкой строгого локального максимума функции f.*

Доказательство. Пусть $q = d^2 f(x_0)$. Поскольку $d\,f(x_0) = 0$, формула Тейлора приводит нас к равенству

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}\, q(x - x_0) + \alpha(x)\|x - x_0\|^2,$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Если квадратичная форма q положительно определена, то мы можем найти такое число $\sigma > 0$, что $q(x - x_0) \geq \sigma\|x - x_0\|^2$ для всех x. Если точка $x \in D$ достаточно близка к x_0 и отлична от x_0, то $|\alpha(x)| < \sigma/2$ и $\|x - x_0\| > 0$, откуда

$$f(x) \geq f(x_0) + [\sigma/2 + \alpha(x)] \, \|x - x_0\|^2 > f(x_0).$$

Это означает, что x_0 служит точкой строгого локального минимума функции f. Случай, когда форма q отрицательно определена, исследуется аналогично, а может быть сведен к рассмотренному заменой f на $-f$. Теорема доказана.

Матаник: Замечательная теорема! Только вот как узнать, что квадратичная форма положительно или отрицательно определена? Не окажется ли, что этот принципиально важный для нас вопрос не проще исходной задачи?

Василий: Нет, не окажется! Нам в алгебре говорили, что есть критерий Сильвестра. Он позволяет алгоритмически, за конечное число шагов, узнать о знаке квадратичной формы. Не надо думать — надо просто посчитать!

Матаник: Интересно! Рассказать можете?

Василий: С удовольствием! Вот смотрите — пусть у нас есть квадратичная форма

$$q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_i v_j$$

от n переменных $v_1, \ldots, v_n$. Мы можем (и будем!) считать, что матрица (a_{ij}) ее коэффициентов симметрична. Посчитаем ее главные миноры $d_1, \ldots, d_n$. Это вот что: для каждого $k = 1, \ldots, n$ число d_k означает минор матрицы, построенный по первым k ее строкам и по первым k столбцам. Критерий Сильвестра — это следующая

Теорема. *Форма q положительно определена тогда и только тогда, когда все миноры $d_1, \ldots, d_n$ строго больше нуля. Далее, форма q отрицательно определена в том и только том случае, когда знаки миноров $d_1, \ldots, d_n$ чередуются, начинаясь с минуса. Наконец, если $d_n \neq 0$, а это значит, что форма q невырождена, и при этом не выполняется ни одно из предыдущих условий на знаки миноров $d_1, \ldots, d_n$, то форма q знакопеременна.*

Определители мы считать умеем, так что со знаками невырожденных квадратичных форм у нас проблем нет. Нетрудно разобраться и с вырожденными формами, но в теории экстремума мы рассматривали только случаи «общего положения», когда этот вопрос не актуален.

Матаник: Прекрасно! Насколько я понимаю, Вам нужно теперь применить все это к анализу невырожденных критических точек функций двух переменных.

Василий: Да, так указано в билете. Теперь это — очень простая задача. Рассмотрим дважды гладкую в некоторой плоской области функцию $f(x, y)$ и какую-нибудь ее критическую точку (x_0, y_0). Это значит, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0, y_0) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0, y_0) = 0.$$

Второй дифференциал функции в точке (x_0, y_0) имеет вид $Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2$, где

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,(x_0, y_0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x_0, y_0).$$

Два имеющихся здесь главных минора d_1 и d_2, порождаемых вторым дифференциалом, определяются формулами $d_1 = A$ и $d_2 = AC - B^2$. Таким образом, мы приходим к следующим выводам.

Т е о р е м а. *Если $A > 0$ и $AC > B^2$, то функция f имеет в точке (x_0, y_0) строгий локальный минимум. Если же $A < 0$, но по-прежнему $AC > B^2$, то функция f имеет в точке (x_0, y_0) строгий локальный максимум. Наконец, если $AC < B^2$, в точке (x_0, y_0) функция f экстремума не имеет.*

Матаник: А что означают эти Ваши выводы геометрически?

Василий: Спасибо, хотя выводы эти, конечно, не Наши. В случае невырожденной критической точки (x_0, y_0), как у нас, график функции f вблизи его точки $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ почти повторяет график половины второго дифференциала нашей функции, если перенести его в эту точку из начала координат, а точнее — примерно имеет вид поверхности

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}[A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2].$$

Это значит, что мы переходим здесь в область аналитической геометрии. А именно, в первом и втором случаях, отмеченных в теореме, мы получаем эллиптический параболоид с вершиной внизу или, соответственно, вверху. В третьем случае получается гиперболический параболоид, если называть по науке, а в просторечьи — седло или перевал.

Матаник: Очень хрошо! Вы не утомились? Ведь у Вас еще две задачи...

6. *Василий*: Я давно их решил, как, врочем, и все другие задачи из всех Ваших заданий. Замечу, что задача про интеграл действительно *алгоритмическая*. В самом деле,

$$I := \int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}} = \int \frac{dx}{e^x \sqrt{e^{-2x} + 1}} = -\int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{(e^{-x})^2 + 1}}.$$

Вспоминая теперь о примере, который мы с Вами обсуждали в связи с вопросом о замене преременной под знаком интеграла, мы приходим к нужному ответу:

$$I = -\ln\left(e^{-x} + \sqrt{(e^{-x})^2 + 1}\right) + C = x - \ln\left(1 + \sqrt{1 + e^{2x}}\right) + C.$$

Матаник: Блестяще! А вторая задача тоже алгоритмическая? Или творческая?

7. *Василий*: Какая задача «алгоритмическая», какая — «творческая», трудно сказать. Зависит не только от задачи, но и от того, кто и как над ней думает. Вот Вы, например, не стали говорить много слов, а просто заменили определения четкими списками. Это удобно!

Что касается задачи про неравенство, должен признаться, что мне сначала пришло в голову попробовать воспользоваться выпуклостью логарифма. Попробовал. Ничего не получилось. «Творческий прорыв» произошел в тот момент, когда пришла другая мысль — изучить функцию $\varphi(x) := x \ln x$. Ее производная $\varphi'(x) = 1 + \ln x$ строго возрастает с ростом x, а это, как мы знаем, означает, что функция φ строго выпукла вниз. В таком случае неравенство Иенсена позволяет нам утверждать, в частности, что

$$\varphi\left(\frac{x + y}{2}\right) < \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}, \quad \text{где} \quad x, y > 0 \quad \text{и} \quad x \neq y.$$

Как легко видеть, это и есть нужное нам строгое неравенство. При $x = y$ оно, разумеется, превращается в точное равенство.

Матаник: Я просто потрясен! Но как Вы думаете, что получится, если здесь натуральный логарифм заменить на логарифм по основанию a, где, как обычно, $a > 0$ и $a \neq 1$?

Василий: Ммм... Да! Отвыкли мы от ненатуральных логарифмов. Впрочем, здесь нет вопроса, поскольку, как нас недавно учили в школе (здесь у Василия, почему-то, проскользнула грустная нотка ... — *Прим. авт.*),

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Таким образом, полагая $c = e$, мы видим, что логарифм $\log_a b$ по основанию a любого выражения b получается делением $\ln b$ на $\ln a$. Если $a > 1$, то $\ln a > 0$, а значит, деление на $\ln a$ сохраняет неравенства. Если же $0 < a < 1$, картина иная — здесь уже $\ln a < 0$, и знак неравенства нужно перевернуть. Вот и все.

Экзаменатор: Все верно! У меня к Вам последний вопрос — Вы решили задачу Гюйгенса?

Студент: Еще бы! Она такая интересная!

Экзаменатор: И что там?

Студент: Во-первых, надо признать, что предыдущий Ваш вопрос, все же, не был последним. Во-вторых, *там* ... геометрическая прогрессия. А в-третьих, если промежуточных шаров очень много и массы их подобраны оптимально, то почти вся энергия шара, который движется, передается шару, вначале неподвижному.

Экзаменатор: Что ж! У меня нет слов, кроме одного — отлично!

***

Милые дети! Как ни крути, а экзамен — это, все-таки, стресс. Вам не избавиться от него в полной мере — вы еще не циники... Но хочется, чтобы этого стресса было как можно меньше, а та его часть, которая неизбежно останется, пусть будет для вас полезна. Я считаю, что экзамен — не место для творчества. Поэтому приложил усилия к тому, чтобы для вас не было ничего неожиданного. Нужно будет просто знать, что вам рассказывали в течение семестра, а от вас ждут только одного — чтобы вы всё это поняли и ровно то же самое сумели рассказать сами, быть может, своими словами, которые могут быть — к нашему глубочайшему удовлетворению — лучше наших. Разумеется, вы можете что-то забыть и не вспомнить во время экзамена. Не нужно мучиться, не стейсняйтесь, признайтесь, что знали, но сейчас забыли. Не беда! Вам подскажут. Очень часто бывает так, что нужно всего лишь чуть-чуть напомнить, подтолкнуть в нужном направлении — и вы, вдохновлённые, раскрываетесь во всей своей красе и полноте, уже летите, как знакомый вам весёлый шарик Гюйгенса, к желанному итогу. Пусть экзамен по матану будет для вас добрым! И оставит о себе светлую память на долгие годы...

И ещё. Давайте договоримся, что двойки и пятёрки — только через лектора. Это вовсе не значит, что лектор заменяет двойку на тройку, а пятёрку — на четвёрку. Что касается двойки, то она должна быть твёрдой и обжалованию не подлежать. Пятёрка же, которую вам предлагает экзаменатор, вовсе не подвергается сомнению. Дело в другом — просто лектору очень хочется видеть и слышать тех, кто усвоил его курс. Усвоил достойно. Покажитесь ему. Поговорите с ним. Не лишайте его этой радости...

Еще раз — удачи! *В. В. Иванов*