

Программа экзамена по математическому анализу

ФФ НГУ, 1 курс, 2 семестр,
2009 - 2010 учебный год

Дорогие ребята! На носу — лето, а вместе с ним — горячо любимые вами экзамены. Сообщаю вам, что подготовка и проведение экзамена по Математическому Анализу поручены мне. О правилах проведения экзамена сказано чуть ниже. Еще ниже вы найдете два перечня вопросов — основной вариант и облегченный.

В каждом билете будет пять вопросов — по одному из пяти глав, на которые разделен курс Анализа во втором семестре. Из них какие-то два будут отмечены звездочкой, три остальных — кружочком. Вопросы со звездочкой предполагают полные ответы со всеми доказательствами, какие были на лекциях. Напротив, вопросы с кружочком не предполагают доказательств. Те, кто готов удовлетвориться тройкой, вправе опустить доказательства и в тех вопросах, которые отмечены звездочкой. Что касается задач, то в этот раз мы решили не указывать их в билетах заранее. Их вам предложит экзаменатор, если до них дойдет дело. Чтобы на экзамене, который, как известно, — не место для творчества, для вас не было ничего неожиданного, мы договорились с преподавателями, что задачи будут из числа тех, что вы должны были решить, чтобы получить право побывать на экзамене. Мы будем стараться, чтобы задачи не требовали слишком громоздких вычислений. Задачи на экзамене призваны отклонить оценку, которая, назревая во время беседы, обычно не выражается целым числом, к наиболее справедливому натуральному значению «от двух до пяти».

Образец билета

1*. Постановка задачи об условном, или относительном, экстремуме. Условно стационарные точки и теорема о необходимом условии относительного экстремума. Метод множителей Лагранжа.

2°. Сформулируйте теорему о граничных значениях и производных интеграла Лапласа. Примените ее к вычислению интеграла Дирихле.

3*. Интегрирование сферически симметричных функций. Многомерный интеграл Эйлера — Пуассона. Объем шара в многомерном пространстве. Условия интегрируемости многомерных «точечных» степенных особенностей.

4°. Выразите дивергенцию в произвольных ортогональных криволинейных координатах. Приведите формулы для цилиндрических и сферических координат.

5°. Сформулируйте первую теорему Абеля о степенных рядах. Приведите определение радиуса сходимости степенного ряда. Насколько и каким образом он определяет область сходимости ряда? Запишите формулы Коши — Адамара и Даламбера.

Важное примечание: в отличие от первого семестра, когда вы были еще молодыми, повторный экзамен в конце сессии будет проходить ровно так же, как и основной, со всей строгостью Анализа. Вы наверняка помните о *высокой планке ФФ НГУ*, о которой я говорил, что ее нельзя понижать, что мы только переносим ее на июнь. Эти слова остаются в силе. Так что — старайтесь! До встречи в июне!

Искренне ваши, В. В. Иванов

Вопросы к экзамену по математическому анализу

Основной вариант

1*. Системы гладких функций

1. Гладкие отображения многомерных пространств. Матрица Якоби и теорема о линейной части приращения гладкого отображения. Теорема о матрице Якоби суперпозиции отображений. Теорема об умножении якобианов.
2. Гладкие отображения многомерных пространств. Матрица Якоби и теорема о линейной части приращения гладкого отображения. Теорема о матрице Якоби обратного отображения. Обратное якобианов.
3. Формулировка общей теоремы о системе неявных функций. Доказательство в случае одного уравнения с двумя неизвестными. Дифференцирование неявных функций.
4. Формулировка общей теоремы о системе неявных функций. Доказательство в случае двух уравнений с тремя неизвестными. Дифференцирование неявных функций.
5. Диффеоморфизмы, или гладкие изоморфизмы. Теорема об обратном отображении. Пример, подчеркивающий локальный характер теоремы.
6. Гладкие многообразия в арифметических пространствах. Касательные векторы. Теорема о линейности множества касательных векторов и его размерности.
7. Теорема о гладких многообразиях, определяемых регулярными системами уравнений. Теорема о касательных пространствах таких многообразий.
8. Постановка задачи об условном, или относительном, экстремуме. Условно стационарные точки и теорема о необходимом условии относительного экстремума. Метод исключения дифференциалов.
9. Постановка задачи об условном, или относительном, экстремуме. Условно стационарные точки и теорема о необходимом условии относительного экстремума. Метод множителей Лагранжа.

2*. Интегрирование функций нескольких переменных

10. Квадрируемые фигуры и их площади. Двойной интеграл и основные его свойства: линейность, аддитивность, монотонность. Оценки среднего значения функции двух переменных. Теорема о сведении двойного интеграла к повторному.
11. Квадрируемые фигуры и их площади. Двойной интеграл и основные его свойства: линейность, аддитивность, монотонность. Геометрический смысл двумерного якобиана. Замена переменных в двойном интеграле.
12. Кубируемые тела и их объемы. Тройной интеграл и основные его свойства. Сведение тройного интеграла к повторным. Геометрический смысл трехмерного якобиана. Замена переменных в тройном интеграле.
13. Обзор теории Лебега: мера Лебега, интеграл Лебега, теорема Фубини — Тонелли о повторных интегралах и «контрпример» Остроградского, замена переменных в интеграле Лебега.
14. Интегрирование сферически симметричных функций. Многомерный интеграл Эйлера — Пуассона. Объем шара в многомерном пространстве. Условия интегрируемости многомерных «точечных» степенных особенностей.
15. Теорема Лебега о «мажорированной» сходимости. Теорема о предельном переходе в интеграле, зависящем от параметра. Теорема о непрерывной зависимости интеграла от параметра.

16. Теорема о предельном переходе в интеграле, зависящем от параметра. Дифференцирование интеграла по параметру, или теорема о том, когда интеграл можно дифференцировать по «правилу Лейбница».

17. Теорема о граничных значениях и производных интеграла Лапласа. Пример применения теоремы: вычисление интегралов Дирихле и Френеля.

3*. Интегрирование дифференциальных форм

18. Криволинейные интегралы первого рода. Дифференциальные 1-формы, их общий вид. Ориентация кусочно-гладкой линии. Криволинейные интегралы второго рода. Вычисление в координатах. Связь с интегралами первого рода. Работа векторного поля.

19. Поверхностные интегралы первого рода. Дифференциальные 2-формы. Внешнее произведение 1-форм. Общий вид 2-форм. Ориентация кусочно-гладкой поверхности. Поверхностные интегралы второго рода. Вычисление в координатах. Связь с интегралами первого рода. Поток векторного поля.

20. Дифференциал гладкой функции. Начало и конец направленной линии. Формула Ньютона — Лейбница для криволинейных интегралов. Случай замкнутого контура.

21. Внешний дифференциал формы первой степени от двух переменных. Положительный обход границы плоской области. Формула Грина. Выражение площади криволинейным интегралом. Выражение потока плоского поля через границу области криволинейным интегралом, его вычисление с помощью двойного интеграла.

22. Внешний дифференциал формы первой степени от трех переменных. Согласование стороны поверхности и обхода ее края. Формула Стокса. Ее взаимоотношения с формулой Грина. Случай замкнутой поверхности.

23. Внешний дифференциал формы второй степени. Внешняя сторона поверхности, ограничивающей пространственную область. Формула Остроградского. Вычисление объемов с помощью поверхностных интегралов.

24. Точные и замкнутые формы первой степени от двух переменных, их характерные свойства. Связь между классами точных и замкнутых форм: замкнутость точной формы, пример неточной замкнутой формы, теорема Пуанкаре и построение первообразной замкнутой 1-формы в прямоугольнике.

25. Точные и замкнутые формы первой степени от трех переменных, их характерные свойства. Связь между классами точных и замкнутых форм: замкнутость точной формы, пример неточной замкнутой формы, теорема Пуанкаре и построение первообразной для замкнутой 1-формы в параллелепипеде.

26. Точные и замкнутые формы второй степени от трех переменных, их характерные свойства. Связь между классами точных и замкнутых форм: замкнутость точной формы, пример неточной замкнутой формы, теорема Пуанкаре и построение первообразной для замкнутой 2-формы в параллелепипеде.

4*. Основы векторного анализа

27. Градиент скалярного поля: определение с помощью дифференциальных форм, выражение в декартовых координатах. Формула Ньютона — Лейбница в векторной записи. Инвариантное определение градиента. Его геометрическая характеристика.

28. Ротор векторного поля: определение с помощью дифференциальных форм, выражение в декартовых координатах. Формула Стокса в векторной записи. Инвариантное определение ротора. Его гидромеханическая интерпретация.

29. Дивергенция векторного поля: определение с помощью дифференциальных форм, выражение в декартовых координатах. Формула Остроградского в векторной записи. Инвариантное определение дивергенции. Ее физический смысл.

30. Ортогональные криволинейные координаты. Масштабные коэффициенты, или параметры Ламе. Выражение градиента в ортогональных криволинейных координатах. Формулы для цилиндрических и сферических координат.

31. Ортогональные криволинейные координаты. Масштабные коэффициенты, или параметры Ламе. Выражение ротора в ортогональных криволинейных координатах. Формулы для цилиндрических и сферических координат.

32. Ортогональные криволинейные координаты. Масштабные коэффициенты, или параметры Ламе. Выражение дивергенции в ортогональных криволинейных координатах. Формулы для цилиндрических и сферических координат.

33. Потенциальные и безвихревые векторные поля, их характерные свойства, связь между ними. Построение скалярного потенциала.

34. Соленоидальные и бездивергентные векторные поля, их характерные свойства, связь между ними. Построение векторного потенциала.

35. Оператор Лапласа: инвариантное определение, запись в общих ортогональных координатах, формулы для декартовых, цилиндрических и сферических координат. Уравнение Пуассона и теорема Гельмгольца.

36. Центральные векторные поля: определение и примеры, построение скалярного потенциала, описание соленоидальных центральных полей.

37. Напряженность силовых полей, создаваемых произвольно распределенными массой или зарядом. Теорема Гаусса. Примеры ее применения к расчету напряженности симметричных гравитационных или электрических полей.

5*. Числовые и функциональные ряды

38. Линейность и ассоциативность суммы ряда. Пример нарушения коммутативности. Теорема Римана об условно сходящихся рядах. Коммутативность суммы абсолютно сходящегося ряда.

39. Общие признаки сравнения для положительных рядов. Признаки Коши и Даламбера. Интегральный признак Маклорена — Коши.

40. Общие признаки сравнения для положительных рядов. Признаки Раабе, Бертрана и Гаусса.

41. Критерий Коши сходимости числового ряда. Лемма Абеля. Признаки Дирихле, Абеля и Лейбница.

42. Бесконечные произведения. Связь с теорией рядов. Признаки сходимости и расходимости бесконечных произведений.

43. Равномерная сходимость функциональной последовательности. Критерий Коши равномерной сходимости. Теорема о перестановке двух предельных переходов.

44. Теоремы о непрерывности, дифференцировании и интегрировании предела последовательности функций, основанные на понятии равномерной сходимости.

45. Равномерная сходимость функционального ряда. Мажорантный признак Вейерштрасса. Теоремы о непрерывности, дифференцировании и интегрировании суммы ряда функций, основанные на понятии равномерной сходимости.

46. Две теоремы Лебега об интегрировании функциональных рядов. Примеры их применения к выражению неэлементарных интегралов через гамма-функцию Эйлера и дзета-функцию Римана.

47. Первая теорема Абеля о степенных рядах. Радиус и область сходимости степенного ряда. Вычисление радиуса сходимости по коэффициентам ряда: формула Коши — Адамара и формула Даламбера.

48. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Степенной ряд как ряд Тейлора своей суммы.

49. Теорема о произведении абсолютно сходящихся числовых рядов. Умножение степенных рядов.

50. Поведение суммы степенного ряда в граничных точках области сходимости, или вторая теорема Абеля. Примеры ее применения.

Вопросы к экзамену по математическому анализу

Облегченный вариант

1°. Системы гладких функций

- 1.1. Приведите определение матрицы Якоби системы гладких функций и сформулируйте теорему о линейной части приращения гладкого отображения.
- 1.2. Сформулируйте теорему о матрице Якоби суперпозиции отображений и правило умножения якобианов. Чему все это соответствует в одномерном случае?
- 1.3. Сформулируйте теорему о матрице Якоби обратного отображения и правило обращения якобианов. Что из этого получается для функций одной переменной?
- 1.4. Сформулируйте теорему о неявной функции, определяемой одним уравнением с двумя неизвестными. Расскажите, как дифференцируют эту функцию.
- 1.5. Сформулируйте теорему о неявной функции, определяемой одним уравнением с тремя неизвестными. Расскажите, как дифференцируют эту функцию.
- 1.6. Сформулируйте теорему о неявных функциях, определяемых системой из двух уравнений с тремя неизвестными. Расскажите, как дифференцируют эти функции.
- 1.7. Сформулируйте теорему о многообразиях, определяемых системами уравнений. Опишите касательные пространства к таким многообразиям.
- 1.8. Приведите определения точки условного, или относительного, экстремума и условно стационарной точки гладкой функции. Сформулируйте теорему о необходимом условии относительного экстремума.
- 1.9. Расскажите, как находят условно стационарные точки методом исключения дифференциалов. Проиллюстрируйте свой рассказ «нетривиальным» примером.
- 1.10. Расскажите, как находят условно стационарные точки методом множителей Лагранжа. Покажите на «нетривиальном» примере, как Вы это делаете.

2°. Интегрирование функций нескольких переменных

- 2.1. Сформулируйте теорему о сведении двойного интеграла к повторному. Приведите пример ее применения.
- 2.2. Расскажите, в чем заключается геометрический смысл двумерного якобиана. Приведите формулу замены переменных в двойном интеграле. Как она выглядит в полярных координатах?
- 2.3. Расскажите, как сводится тройной интеграл к повторному. Приведите примеры, отвечающие двум типам «сечений» — одномерным и двумерным.
- 2.4. Расскажите, в чем заключается геометрический смысл трехмерного якобиана. Приведите формулу замены переменных в тройном интеграле. Как она выглядит в цилиндрических и сферических координатах?
- 2.5. Сформулируйте теорему Фубини — Тонелли о повторных интегралах Лебега. Расскажите о «контрпримере» Остроградского, предостерегающем от ошибок.
- 2.6. Запишите формулу, сводящую многомерный интеграл от сферически симметричной функции к одномерному интегралу. Приведите пример ее применения.
- 2.7. Посчитайте многомерный интеграл Эйлера — Пуассона. Примените формулу к вычислению объема многомерного шара.
- 2.8. Сформулируйте теорему об условиях интегрируемости многомерных «точечных степенных особенностей».
- 2.9. Сформулируйте теорему о граничных значениях и производных интеграла Лапласа. Примените ее к вычислению интеграла Дирихле.
- 2.10. Сформулируйте теорему о граничных значениях и производных интеграла Лапласа. Примените ее к вычислению интегралов Френеля.

3°. Интегрирование дифференциальных форм

3.1. Расскажите, как с помощью параметризации линии вычисляют криволинейные интегралы первого и второго рода, как эти интегралы связаны между собой, как вычисляется работа поля вдоль ориентированной линии.

3.2. Расскажите, как с помощью параметризации поверхности вычисляют поверхностные интегралы первого и второго рода, как эти интегралы связаны между собой, как вычисляется поток поля через ориентированную поверхность.

3.3. Приведите определение дифференциальной формы первой степени, укажите общий вид этих форм. Запишите формулу Ньютона — Лейбница для криволинейных интегралов. Не забудьте про случай замкнутого контура.

3.4. Представьте в каноническом виде внешний дифференциал формы первой степени от двух переменных. Запишите формулу Грина. Выразите площадь фигуры криволинейным интегралом второго рода.

3.5. Представьте в каноническом виде внешний дифференциал формы первой степени от трех переменных. Запишите формулу Стокса. Уделите особое внимание случаю замкнутой поверхности.

3.6. Представьте в канонической форме внешний дифференциал формы второй степени от трех переменных. Запишите формулу Остроградского. Выразите объем тела поверхностным интегралом второго рода.

3.7. Приведите определения точных и замкнутых дифференциальных форм первой степени от двух переменных, опишите связь между этими классами форм, приведите пример неточной замкнутой формы.

3.8. Расскажите, как можно построить первообразную замкнутой формы первой степени от двух переменных в прямоугольнике. Приведите пример на свой вкус.

3.9. Приведите определения точных и замкнутых дифференциальных форм первой степени от трех переменных, опишите связь между этими классами форм, приведите пример неточной замкнутой формы.

3.10. Расскажите, как можно построить первообразную замкнутой формы первой степени от трех переменных в параллелепипеде. Приведите пример на свой вкус.

3.11. Приведите определения точных и замкнутых дифференциальных форм второй степени от трех переменных, опишите связь между этими классами форм, приведите пример неточной замкнутой формы.

3.12. Расскажите, как можно построить первообразную замкнутой формы второй степени от трех переменных в параллелепипеде. Приведите пример на свой вкус.

4°. Основы векторного анализа

4.1. Градиент скалярного поля — определение, выражение в декартовых координатах, геометрическая характеристика. Запишите формулу Ньютона — Лейбница в векторной форме.

4.2. Ротор векторного поля — определение, выражение в декартовых координатах, гидромеханическая интерпретация. Запишите формулу Стокса в векторной форме.

4.3. Дивергенция векторного поля — определение, выражение в декартовых координатах, физический смысл. Запишите формулу Остроградского в векторной форме.

4.4. Что такое поток плоского векторного поля через границу области «наружу»? Запишите его с помощью криволинейных интегралов первого и второго рода. Опираясь на формулу Грина, выразите его двойным интегралом.

4.5. Выразите градиент в произвольных ортогональных криволинейных координатах. Приведите формулы для цилиндрических и сферических координат.

4.6. Выразите ротор в произвольных ортогональных криволинейных координатах. Приведите формулы для цилиндрических и сферических координат.

4.7. Выразите дивергенцию в произвольных ортогональных криволинейных координатах. Приведите формулы для цилиндрических и сферических координат.

4.8. Приведите определения потенциального и безвихревого векторных полей, укажите их характерные свойства, опишите связь между ними. Расскажите, как построить скалярный потенциал безвихревого поля, заданного в ортогональных криволинейных координатах.

4.9. Приведите определения соленоидального и бездивергентного векторных полей, укажите их характерные свойства, опишите связь между ними. Расскажите, как построить векторный потенциал бездивергентного поля, заданного в ортогональных криволинейных координатах.

4.10. Оператор Лапласа — инвариантное определение, запись в общих ортогональных криволинейных координатах, формулы для цилиндрических и сферических координат. Сформулируйте теоремы Гельмгольца о разложении векторных полей.

4.11. Какие векторные поля называют центральными? Постройте скалярный потенциал центрального поля. Опишите все соленоидальные центральные поля.

4.12. Сформулируйте «гравитационно-электрическую» теорему Гаусса и приведите два-три симпатичных примера ее применения.

5°. Числовые и функциональные ряды

5.1. В каком случае говорят, что сумма ряда коммутативна? Приведите пример нарушения коммутативности. Сформулируйте теорему Римана о сумме условно сходящегося ряда. Когда же сумма ряда, все-таки, коммутативна?

5.2. Приведите определение суммы числового ряда. В качестве примера расскажите о сумме бесконечной геометрической прогрессии. Сформулируйте признаки Коши и Даламбера. Опишите, что бывает на «границе» области их применимости.

5.3. Приведите определение суммы числового ряда. В качестве примера расскажите о сумме бесконечной геометрической прогрессии. Сформулируйте интегральный признак Маклорена — Коши и признак Гаусса.

5.4. Приведите определение суммы числового ряда. Сформулируйте признаки Дирихле, Абеля и Лейбница.

5.5. Опишите связь между теорией рядов и теорией бесконечных произведений. Сформулируйте признаки сходимости и расходимости бесконечного произведения.

5.6. Приведите определение равномерной сходимости функциональной последовательности. Сформулируйте теорему о перестановке двух предельных переходов. Покажите на примерах, как важно в этой теореме условие равномерной сходимости.

5.7. Приведите определение равномерной сходимости функционального ряда. Сформулируйте теоремы о непрерывности, дифференцировании и интегрировании функциональных рядов, основанные на понятии равномерной сходимости.

5.8. Сформулируйте первую теорему Абеля о степенных рядах. Приведите определение радиуса сходимости степенного ряда. Насколько и каким образом он определяет область сходимости ряда? Запишите формулы Коши — Адамара и Даламбера.

5.9. Сформулируйте теоремы о «почленном» дифференцировании и интегрировании степенных рядов. Приведите примеры их применения к вычислению сумм конкретных степенных рядов. Объясните, почему степенной ряд есть ряд Тейлора своей суммы.

5.10. Сформулируйте вторую теорему Абеля, описывающую поведение суммы степенного ряда на границе его области сходимости. Расскажите, как ее можно применить, например, к вычислению сумм некоторых замечательных рядов из класса Лейбница.

Желаю успехов!

В. В. Иванов