

# Математический анализ

## Примеры задач для экзамена

2 семестр, ФФ НГУ, 2009 - 2010

### 1. Системы гладких функций

1. Посчитайте дифференциалы  $dz$  и  $d^2z$  в точке  $(0, 1)$  дважды гладкой функции  $z = z(x, y)$ , удовлетворяющей уравнению

$$x^2 - y^2 + 2z^2 + xy - zy = 0$$

и условию  $z(0, 1) = 1$ .

2. Найдите производные первого и второго порядка дважды гладких в точке  $z = 2$  функций  $x = x(z)$  и  $y = y(z)$ , удовлетворяющих системе уравнений

$$x^2 + y^2 = z^2/2, \quad x + y + z = 2$$

и условиям  $x(2) = 1$ ,  $y(2) = -1$ .

3. Пусть при  $x = y = 0$  гладкие функции  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$  равны нулю и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3.$$

Докажите, что вблизи точки  $u = v = 0$  определены гладкие обратные функции  $x = x(u, v)$  и  $y = y(u, v)$ . Найдите их первые частные производные в указанной точке.

4. Найдите  $\partial z/\partial x$  и  $\partial z/\partial y$  в точке, где  $u = 0$  и  $v = 1$ , если

$$x = u + uv + v^2, \quad y = v - u^2, \quad z = 2u + \ln v.$$

5. Принимая  $u$  и  $v$  за новые переменные, а  $w = w(u, v)$  за новую функцию, преобразуйте уравнение

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}, \quad \text{если } u = x/y, \quad v = x \quad \text{и} \quad w = xz - y.$$

6. Докажите, что уравнения

$$-x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0, \quad x^2 + z^2 - u^2 + 9 = 0$$

определяют гладкое двумерное многообразие в четырехмерном арифметическом пространстве.

7. Убедитесь, что система уравнений

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + z^2 + u^2 = 4,$$

задает гладкое двумерное многообразие в пространстве четырех измерений. Докажите, что функция  $xy + uz$  имеет на нем минимум и максимум. Найдите эти значения. Для этого в Вашем распоряжении метод исключения дифференциалов и метод множителей Лагранжа. Преподаватель может предложить Вам применить любой из этих двух методов. Будьте готовы.

## 2. Интегрирование функций нескольких переменных

1. Считая для простоты функцию  $f(x, y)$  всюду непрерывной, измените порядок интегрирования в повторных интегралах

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy \quad \text{и} \quad \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy.$$

Нарисуйте области, по которым вычисляются соответствующие двойные интегралы.

2. Подберите замену переменных, переводящую криволинейный четырехугольник, ограниченный линиями

$$xy = 1, \quad xy = 2, \quad y = 2x, \quad 2y = x$$

и лежащий в области  $x > 0, y > 0$ , в прямоугольник со сторонами, параллельными осям новых координат. Преобразуйте двойной

интеграл по четырехугольнику произвольной непрерывной на нем функции к новым переменным.

3. Перейдите к полярным координатам в интегралах

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy ; \quad \int\int_{x^2+y^2\leq x} f(y/x) dx dy.$$

4. Посчитайте следующие двойные интегралы:

$$\int\int_{|x|+|y|\leq 1} (|x|+|y|) dx dy; \quad \int\int_{x^4+y^4\leq 1} (x^2+y^2) dx dy.$$

5. Найдите площадь лежащей в пространстве плоской фигуры, которая ограничена линией, заданной двумя уравнениями

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 1 \quad \text{и} \quad x + y + z = 0.$$

6. Вычислите тройной интеграл

$$\iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz$$

по области  $V$ , ограниченной эллипсоидом с полуосями  $a, b, c$ .

7. По области  $V$ , ограниченной плоскостью  $x + y + z = 1$  и тремя координатными плоскостями, найдите интеграл

$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^3}.$$

8. Найдите объем тела, ограниченного поверхностью

$$|x|^{1/2} + |y|^{1/2} + |z|^{1/2} = 1.$$

9. Считая параметр  $p$  положительным, исследуйте сходимость несобственных двойных интегралов:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{|x-y|^p}; \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{(x+y)^p}.$$

10. Считая все параметры положительными, исследуйте сходимость несобственных тройных интегралов:

$$\int_{|x|+|y|+|z|\geq 1} \frac{dx dy dz}{|x|^a + |y|^b + |z|^c}; \quad \int_{x^2+y^2+z^2\leq 1} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}.$$

11. Найдите объем  $n$ -мерной пирамиды

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1, \quad x_i \geq 0.$$

12. Найдите объем  $n$ -мерного конуса

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq x_n^2, \quad 0 \leq x_n \leq 1.$$

### 3. Интегрирование дифференциальных форм

1. Запишите в полярных координатах  $\varrho, \varphi$ , отвечающих декартовым переменным  $x, y$ , следующие две формы:

$$\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Посчитайте производные и произведение этих форм. Вычисления проведите в декартовых и полярных координатах.

2. Выразите в полярных координатах форму  $dx \wedge dy$ .

3. Перейдите к цилиндрическим координатам  $\varrho, \varphi, z$  в следующих формах от трех декартовых переменных  $x, y, z$ :

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{x dx + y dy + z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

То же самое сделайте для сферических координат  $r, \vartheta, \varphi$ . Запишите эти формы в каждой системе координат в виде дифференциалов соответствующих функций.

4. Выразите в цилиндрических и сферических координатах форму второй степени от трех декартовых переменных:

$$\frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Посчитайте ее внешнюю производную, проведя вычисления в каждой из трех упомянутых систем координат.

5. Представьте форму  $dx \wedge dy \wedge dz$  в цилиндрических и сферических координатах.

6. Вычислите интегралы от 1-форм по линиям на плоскости:

$$\int_C (2 - y) dx + x dy, \quad \int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy,$$

где  $C$  — третья арка циклоиды  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ , если считать от начала координат слева направо, и двигаться по ней в том же направлении, а  $L$  — ломаная  $y = 1 - |1 - x|$ ,  $0 \leq x \leq 2$ , направленная в обратную сторону.

7. Посчитайте интегралы от 1-форм по линиям в пространстве:

$$\int_{C_{\pm}} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz,$$

где  $C_{\pm}$  — окружности, по которым единичная сфера с центром в нуле пересекается вертикальными плоскостями  $y = \pm x$ , и которые пробегаются против часовой стрелки, если наблюдать за этим со стороны положительной полуоси абсцисс.

8. Применяя формулу Ньютона — Лейбница, посчитайте два криволинейных интеграла:

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x (\cos y dx - \sin y dy), \quad \int_{(1,2,3)}^{(7,1,1)} yz dx + xz dy + xy dz.$$

9. Найдите интеграл от формы второй степени:

$$\iint_{S^+} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy,$$

где  $S^+$  — внешняя сторона сферы радиуса  $R$  с центром  $(a, b, c)$ .

10. Примените формулу Стокса к вычислению следующих трех интегралов от форм первой степени по замкнутым контурам.

$$(a) \int_C (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz,$$

где линия  $C$ , вместе с направлением на ней, задана уравнениями  $x = \sin^2 t$ ,  $y = 2 \sin t \cos t$ ,  $z = \cos^2 t$ . Убедитесь, что это — эллипс. Опишите его расположение в пространстве.

$$(б) \int_C (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz,$$

где  $C$  — тоже эллипс, но теперь заданный как пересечение поверхностей  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x + 2z = 1$ . При интегрировании движение по нему происходит против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной полуоси абсцисс. Каким видится это движение со стороны положительной полуоси аппликат?

$$(в) \int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz,$$

где  $C$  — граничная линия сечения куба  $0 \leq x, y, z \leq 2$  плоскостью  $x + y + z = 3$ , пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть из вершины куба, наиболее удаленной от начала координат.

11. С помощью формулы Остроградского найдите интегралы от форм второй степени по замкнутым поверхностям:

$$(a) \iint_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy,$$

где  $S$  — внешняя сторона симплекса, построенного по трем базисным векторам, которые приложены к началу декартовых координат;

$$(б) \iint_S x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy,$$

где  $S$  — внешняя сторона единичной сферы с центром в нуле.

12. (а) Для формы первой степени от двух переменных

$$(3x^2 + 4xy + y^3 e^{xy}) dx + (2x^2 + y(2 + xy)e^{xy}) dy$$

проверьте условие замкнутости и найдите первообразную.

(б) То же самое сделайте для формы первой степени от трех переменных

$$\left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \frac{xy}{z^2} dz.$$

(в) Выполните то же задание для формы

$$(xz - y) dy \wedge dz + (x - yz) dz \wedge dx - 2(x + y) dx \wedge dy$$

второй степени от трех переменных.

#### 4. Основы векторного анализа

1. Докажите любым доступным Вам способом следующие часто используемые четыре формулы векторного анализа:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(UV) &= U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U, \\ \operatorname{div}(UA) &= U \operatorname{div} A + A \cdot \operatorname{grad} U, \\ \operatorname{rot}(UA) &= U \operatorname{rot} A - A \times \operatorname{grad} U, \\ \operatorname{div}(A \times B) &= B \cdot \operatorname{rot} A - A \cdot \operatorname{rot} B, \end{aligned}$$

где  $U$  и  $V$  — скалярные,  $A$  и  $B$  — векторные поля.

2. Докажите, что для любых дважды гладких скалярных полей  $U$  и  $V$  векторное поле  $V \operatorname{grad} U$  ортогонально своему ротору, а поле  $\operatorname{grad} U \times \operatorname{grad} V$  имеет нулевую дивергенцию.

3. Пусть  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки,  $\vec{c}$  — постоянный вектор. Выразите следующие поля через векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{r}$ , используя только операции векторной алгебры:

$$\operatorname{grad} \vec{c} \cdot \vec{r}, \quad \operatorname{rot} \vec{c} \times \vec{r}, \quad \operatorname{div} \vec{c} \times \vec{r}, \quad \operatorname{grad} |\vec{c} \times \vec{r}|^2.$$

4. Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — постоянные векторы, а  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки. Докажите равенства:

$$\operatorname{div} \vec{a} \times (\vec{r} \times \vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{b}, \quad \operatorname{rot} (\vec{r} \cdot \vec{a}) \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

5. Пусть  $\vec{a}$  означает произвольное гладкое векторное поле, а  $\vec{n}$  — постоянное направление, т. е. вектор единичной длины. Докажите равенство:

$$\vec{n} \cdot (\text{grad } \vec{a} \cdot \vec{n} - \text{rot } \vec{a} \times \vec{n}) = \text{div } \vec{a}.$$

6. Нарисуйте указанные ниже линии и вычислите криволинейные интегралы:

$$\int_L (x^{4/3} + y^{4/3}) ds, \quad \int_C x^2 ds, \quad \int_\Gamma |y| ds,$$

где  $L$  — астроида  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ , линия  $C$  — это лежащая в плоскости  $x + y + z = 0$  единичная окружность с центром в нуле, а  $\Gamma$  — лемниската  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ .

7. С какой силой материальная точка, расположенная в центре однородной окружности, притягивается половиной этой окружности? А ее третью?

8. Пусть  $S$  — часть конической поверхности  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , вырезанная цилиндром  $x^2 + y^2 = 2x$ . (а) Найдите координаты центра тяжести поверхности  $S$ , считая плотность ее постоянной. (б) Посчитайте интеграл по поверхности  $S$  от функции  $xy + xz + yz$ .

9. Посчитайте циркуляцию вдоль границы заданной плоской области: (а) постоянного поля; (б) радиуса-вектора  $\vec{r}$ . Для тех же векторных полей найдите их потоки через границу области.

10. Посчитайте поток поля  $\vec{r}/r^2$  через границу плоской области. Разберите случаи, когда начало координат лежит вне области, внутри нее и на ее границе, считая в последнем случае, что границей служит гладкая линия.

11. Пусть в замкнутой трехмерной области  $V$ , ограниченной гладкой поверхностью  $S$ , заданы дважды гладкие функции  $u$  и  $v$ . Докажите пространственный вариант «второй» формулы Грина:

$$\iiint_V (v \Delta u - u \Delta v) dx dy dz = \iint_S (v \partial u / \partial n - u \partial v / \partial n) dS,$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа, а символ  $\partial/\partial n$  означает производную по направлению внешней нормали в текущей точке поверхности.

12. Пользуясь теоремой Гаусса, посчитайте напряженность  $\vec{E}$  электрического поля, создаваемого равномерно заряженным: (а) шаровым слоем — областью пространства, заключенной между концентрическими сферами; (б) бесконечной в обе стороны трубой — областью, заключенной между двумя соосными цилиндрами; (в) бесконечной по четырем направлениям плитой — областью, заключенной между двумя параллельными плоскостями. Нарисуйте графики, отражающие зависимость величины  $E$  от  $r$ , где  $r$  — расстояние от исследуемой точки: в первом случае — до центра сфер, во втором — до оси цилиндров, в третьем — до средней плоскости.

5. Числовые и функциональные ряды

1. Посчитайте две красивые суммы

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots;$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots$$

2. Исследуйте вопрос о сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

3. Выясните, при каких значениях вещественного параметра  $p$  сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}.$$

4. Исследуйте сходимость ряда

$$\frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \dots,$$

считая параметры  $a, b$  и  $d$  положительными.

5. Определите, сколько слагаемых в каждом из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

нужно взять, чтобы посчитать суммы с точностью до  $10^{-5}$ .

6. Исследуйте вопрос об условной и абсолютной сходимости хорошо знакомых Вам рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}.$$

Тот же вопрос — для рядов

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p} \quad \text{и} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[\sqrt{n} + (-1)^n]^p}.$$

7. Докажите симпатичные тождества:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}; \quad \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$$

8. Вычислите значения произведений:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left[ 1 - \frac{2}{n(n+1)} \right]; \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 + \frac{1}{n(n+2)} \right].$$

9. Найдите доказательства двух замечательных равенств:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}; \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

10. Исследуйте сходимость бесконечных произведений:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \prod_{n=1}^{\infty} {}^n\sqrt{n}; & (2) \quad & \prod_{n=1}^{\infty} {}^n\sqrt{n}; \\ (3) \quad & \prod_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}; & (4) \quad & \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n + (-1)^n}. \end{aligned}$$

11. Найдите радиусы сходимости и опишите области сходимости вещественных степенных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p x^n.$$

12. Вычислите сотые производные в нуле у функций

$$\frac{x}{1+x-2x^2}; \quad \text{и} \quad \frac{12-5x}{6-5x-x^2}.$$

13. Запишите в виде сумм степенных рядов функции

$$\frac{x}{\sqrt{1-2x}} \quad \text{и} \quad \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

указав области, в которых действуют полученные Вами формулы.

14. Разложите в степенные ряды функции

$$e^x \cos x \quad \text{и} \quad e^x \sin x,$$

а также две важные функции, определяемые интегралами:

$$\int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{и} \quad \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Укажите, при каких значениях вещественной переменной  $x$  справедливы Ваши разложения.

15. Найдите суммы степенных рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n+1},$$

применяя дифференцирование, интегрирование и некоторые элементарные преобразования.

*Как всегда, желаю успехов!*

*В. В. Иванов*