

В. В. Иванов

Математический анализ

Ответы на вопросы к экзамену
по теме «Предел и непрерывность»

1 семестр, ФФ НГУ, 2009 - 2010

1. Предел и непрерывность

Вопрос 1. *Приведите определения точных границ числового множества. Сформулируйте теорему Дедекинда о полноте числовой прямой и, опираясь на нее, докажите теорему о существовании точных границ.*

Сначала мы сформулируем теорему, которая, при всей ее элементарности и геометрической очевидности, отражает настолько важное свойство системы вещественных чисел, что приходится лишь удивляться, почему ее до сих пор нет в программе школьной математики. Ее называют *теоремой Дедекинда* о полноте числовой прямой. Эта теорема не только представляет собой ту основу, без которой немислимы практически никакие конструкции математического анализа, но, прежде всего, завершая построение в нашем воображении цельного, непрерывного образа числовой прямой, она внушает нам уверенность в том, что долгий путь, по которому шло человечество, расширяя свои числовые владения, пройден им до конца.

Т е о р е м а. *Если непустые подмножества A и B числовой прямой таковы, что $x \leq y$, каковы бы ни были $x \in A$ и $y \in B$, то найдется хотя бы одна точка c , разделяющая эти множества в том смысле, что $x \leq c \leq y$ одновременно для всех $x \in A$ и $y \in B$.*

Вместо *доказательства*, которое возможно только при наличии точного определения вещественного числа и которое не требуется при вашем ответе, мы приведем здесь, исключительно для любознательных, *пояснение*, цель которого — показать, что в обсуждаемой теореме нет ничего таинственного и сложного.

Будем пока считать, что среди элементов множества A найдется хотя бы одно положительное число. Запишем каждое такое число в виде бесконечной десятичной дроби. Поскольку множество A ограничено сверху, например, любым числом из B , мы можем выбрать в нем число с наибольшей целой частью. Пусть она равна c_0 . Теперь среди всех чисел, принадлежащих множеству A и имеющих целую часть c_0 , выберем те, у которых самая большая цифра в разряде десятых. Пусть это будет цифра c_1 . Ясно, что нам делать дальше — рассматривая лишь те числа из A , чья десятичная запись начинается дробью c_0, c_1 , мы выберем из них все числа с наибольшей цифрой

c_2 в разряде сотых, затем перейдем к разряду тысячных и т. д. В результате этих действий у нас сформируется бесконечная цепочка символов $c_0, c_1c_2 \dots c_n \dots$, выражающая вполне определенное вещественное число. Оно и «разделяет» наши множества — достаточно вспомнить, как сравнивают вещественные числа, записанные в виде бесконечных десятичных дробей.

Аналогичный вариант, когда множество B содержит хоть одно отрицательное число, сводится к уже изученному переходом к противоположным числам. В оставшемся случае, когда в A нет положительных чисел, а в множестве B нет отрицательных, в качестве разделяющей точки, очевидно, можно взять нуль. Вот и все.

Теперь рассмотрим на числовой прямой множество A . Число u мы назовем его *нижней границей*, если $u \leq x$ для всех $x \in A$. Если же число v таково, что $x \leq v$ для всех $x \in A$, его называют *верхней границей* множества A . Множество, обладающее нижней или верхней границей, называют соответственно *ограниченным снизу* или *ограниченным сверху*.

Т е о р е м а. *Если непустое подмножество числовой прямой ограничено снизу, среди всех его нижних границ есть наибольшая. Точно так же, если непустое множество вещественных чисел ограничено сверху, оно обладает наименьшей верхней границей.*

Доказательство. Пусть множество A непусто и, к примеру, ограничено сверху. Тогда множество B , составленное из всех его верхних границ, тоже непустое. При этом $x \leq y$ каждый раз, когда $x \in A$ и $y \in B$. Теорема Дедекинда позволяет нам в таком случае найти на прямой точку c , для которой, во-первых, $x \leq c$ для всех $x \in A$, а во-вторых, $c \leq y$ для всех $y \in B$. Первое из этих неравенств показывает, что c служит верхней границей множества A и, следовательно, $c \in B$. Но тогда второе неравенство означает, что c представляет собой наименьший элемент множества B . Теорема доказана.

Наибольшую из нижних границ множества A принято называть его *точной нижней границей*, или *нижней гранью*, и обозначать символом $\inf A$. Аналогично, наименьшую из всех верхних границ множества A называют *точной верхней границей* этого множества, или его *верхней гранью*, и обозначают символом $\sup A$. Эти обозначения происходят от латинских слов *infimus*, с ударением на первой гласной, и *supremus*, где ударным служит второй слог. Если число-

вое множество A не ограничено снизу, будем говорить, что его точной нижней границей служит *минус бесконечность*, выражая это соотношением $\inf A = -\infty$. Аналогично, мы пишем $\sup A = +\infty$, если множество A не ограничено сверху, считая *плюс бесконечность* его точной верхней границей.

Вопрос 2. *Предел последовательности — определения для случаев конечного и бесконечных пределов обоих знаков, примеры на каждый случай. Порядковые свойства предела.*

Рассмотрим бесконечную последовательность x_1, x_2, x_3, \dots вещественных чисел. Будем говорить, что она *стремится*, или *сходится*, к числу a , выражая это формулой $x_n \rightarrow a$, если каждый интервал с центром в точке a содержит все ее элементы x_n с достаточно большими номерами n . Число a в таком случае называют *пределом* последовательности x_n и обозначают символом $\lim x_n$. Иногда бывает уместно подчеркнуть, что речь идет о поведении переменной величины x_n при неограниченном росте n , и тогда пишут

$$x_n \rightarrow a \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{или} \quad a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

На языке неравенств наше определение сходимости означает следующее: какое бы ни взяли число $\varepsilon > 0$, найдется такой номер N , что $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$. Как нетрудно понять, проверку этого условия при желании можно свести к доказательству двух отдельных утверждений: если $a' < a$, то найдется такой номер n' , что $x_n > a'$ при $n \geq n'$; если же $a'' > a$, то можно найти такой номер n'' , что $x_n < a''$ для всех $n \geq n''$.

В качестве примера можно взять последовательность $x_n = 1/n$. Она, очевидно, стремится к нулю. В самом деле, каким бы малым ни было число $\varepsilon > 0$, найдется натуральное число $N > 1/\varepsilon$, а тогда

$$0 < x_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

если только $n \geq N$. Пример, казалось бы, тривиальный, но он принципиально важен, ибо, в конечном счете, именно к нему сводятся другие, в том числе, нетривиальные, предельные соотношения. Так, $2^{-n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, поскольку $2^{-n} < 1/n$ при $n > 1$, что легко проверить, скажем, по индукции. Другой пример: так как, очевидно,

$$1 < 2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

при $n > 1$, то $0 < \sqrt[n]{2} - 1 < 1/n$ при тех же $n > 1$, а значит, $\lim \sqrt[n]{2} = 1$. Ясно, что рассмотренные нами примеры допускают обобщения.

Говорят, что последовательность вещественных чисел x_n *стремится к* $+\infty$, или, другими словами, что $+\infty$ является ее *пределом*, если для любого числа E найдется такой номер N , что $x_n > E$ для всех $n \geq N$. При этом пишут

$$x_n \rightarrow +\infty, \quad \text{или} \quad \lim x_n = +\infty.$$

Простейшим примером может служить последовательность самих натуральных чисел, а также последовательность, полученная из нее умножением на положительное число. То же самое можно сказать и о любой большей последовательности. Рассмотрим, например, геометрическую прогрессию q^n . Если ее знаменатель q больше единицы, его можно представить в виде суммы $q = 1 + \alpha$, где $\alpha > 0$. В таком случае, как показывает биномиальная формула,

$$q^n = (1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \dots \geq 1 + n\alpha,$$

а значит, $q^n \rightarrow +\infty$.

Говорят, что последовательность вещественных чисел x_n *стремится к* $-\infty$, или, другими словами, что $-\infty$ является ее *пределом*, если для любого числа E найдется такой номер N , что $x_n < E$ для всех $n \geq N$. При этом пишут

$$x_n \rightarrow -\infty, \quad \text{или} \quad \lim x_n = -\infty.$$

В качестве иллюстрации здесь можно взять любой пример последовательности, стремящейся к $+\infty$, и поменять знаки ее элементов.

Т е о р е м а. *Никакая последовательность вещественных чисел не может иметь два различных предела.*

Доказательство. Предположим, что x_n стремится сразу к двум точкам числовой прямой, хотя бы и «расширенной». Выберем строго между ними точку c и заметим, что при достаточно больших значениях номера n , как вытекает из наших определений, точкам x_n

необходимо быть одновременно слева и справа от c . Геометрические точки такой способностью не обладают. Теорема доказана.

Если последовательность бесконечно много раз меняет знак, она не может стремиться ни к $+\infty$, ни к $-\infty$, хотя абсолютная величина ее элементов может при этом стремиться к бесконечности. Последовательность x_n , каковы бы ни были знаки ее элементов, называют *бесконечно большой*, если $|x_n| \rightarrow +\infty$. Такова, например, геометрическая прогрессия q^n , при условии, что $|q| > 1$. Это мы уже знаем.

Т е о р е м а. *Последовательность отличных от нуля вещественных чисел x_n является бесконечно большой тогда и только тогда, когда обратные величины x_n^{-1} стремятся к нулю.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Когда элементы бесконечно большой последовательности x_n становятся по модулю большими числа $1/\varepsilon$, модули обратных к ним величин $1/x_n$, естественно, меньше ε . Это значит, что $1/x_n \rightarrow 0$. Очевидное обращение изложенных рассуждений мы позволим себе опустить. Теорема доказана.

Так, если $|q| < 1$, то $q^n \rightarrow 0$. В самом деле, при $q = 0$ это ясно. Если же $q \neq 0$, то определена прогрессия q^{-n} обратных к q^n величин, модули которых, как мы видели, стремятся к $+\infty$.

Если одно из двух чисел строго больше другого, то небольшое их «шевеление» не изменит соотношения между ними. В этом смысл следующего утверждения, которое можно назвать теоремой *об устойчивости строгих неравенств*.

Т е о р е м а. *Пусть $x_n \rightarrow a$ и $y_n \rightarrow b$. Если $a > b$, то и $x_n > y_n$ для всех n , начиная с некоторого номера.*

Доказательство. Выберем число c из интервала $a > c > b$. Тогда для всех достаточно больших n должны одновременно выполняться неравенства $x_n > c$ и $c > y_n$, откуда $x_n > y_n$. Теорема доказана.

Как можно заметить, аргументы здесь те же, что и в теореме об единственности предела, которая, кстати, содержится в только что доказанном утверждении. Другая, эквивалентная его формулировка приводит нас к теореме *о предельном переходе в неравенстве*.

Т е о р е м а. *Предположим, что последовательности x_n и y_n имеют пределы. Если при этом существуют сколь угодно большие индексы n , для которых $x_n \leq y_n$, то $\lim x_n \leq \lim y_n$.*

Доказательство. Как мы только что видели, если предел x_n больше предела y_n , то $x_n > y_n$ для всех n , начиная с какого-то номера N , хотя, по условию, и для N должен был найтись больший его индекс n , для которого $x_n \leq y_n$. Теорема доказана.

Отметим еще один простой факт, относящийся к нашей теме. Его красноречиво называют теоремой о зажатой последовательности.

Т е о р е м а. Если $x_n \leq y_n \leq z_n$ для всех достаточно больших номеров n , причем, $x_n \rightarrow a$ и $z_n \rightarrow a$, то и $y_n \rightarrow a$.

Доказательство. Пусть $a' < a$. Тогда для всех n , начиная с некоторого момента, $y_n \geq x_n > a'$, откуда $y_n > a'$. Если же $a < a''$, то для всех достаточно больших n справедливы неравенства $y_n \leq z_n < a''$, и значит, $y_n < a''$. Таким образом, $y_n \rightarrow a$. Теорема доказана.

Рассмотрим, например, последовательность

$$y_n := \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Ее «подпорками» слева и справа служат последовательности

$$x_n := \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \quad \text{и} \quad z_n := \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Поскольку, как легко понять, $x_n \rightarrow 1$ и $z_n \rightarrow 1$, мы приходим к соотношению $y_n \rightarrow 1$, изначально вовсе не очевидному.

Вопрос 3. Предел последовательности — определения для случаев конечного и бесконечных пределов обоих знаков, примеры на каждый случай. Арифметические свойства предела.

Здесь нужно, прежде всего, повторить все, что сказано при ответе на вопрос 2, начиная с определения сходящейся последовательности и заканчивая теоремой об единственности предела вместе с ее доказательством. Далее полезно уточнить, что последовательность мы называем *сходящейся*, если она имеет *конечный* предел, а также заметить, что здесь речь пойдет только о таких последовательностях.

Чтобы облегчить изложение вопроса об арифметических свойствах предела последовательности, предварительно отметим и докажем несколько простых утверждений.

Последовательность считают *ограниченной*, если все ее элементы по абсолютной величине меньше некоторого общего для них положительного числа, что равносильно ограниченности множества всех ее элементов как слева, так и справа в прежнем смысле этого слова.

Любая сходящаяся последовательность ограничена.

Это ясно: если последовательность x_n стремится к числу a , то все ее элементы x_n с достаточно большими номерами n заключены, например, в интервале $a - 1 < x_n < a + 1$, так что все они в совокупности ограничены. Остается заметить, что оставшиеся несколько элементов последовательности могут лишь раздвинуть ее границы, но не повлияют на ее ограниченность.

Последовательность называют *бесконечно малой*, если она стремится к нулю. Примером, как мы уже видели, может служить последовательность чисел, обратных к натуральным. Как уже отмечалось, еще быстрее стремятся к нулю геометрические прогрессии, чьи знаменатели по модулю строго меньше единицы. Любой конечный список нетривиальных примеров бесконечно малых можно легко увеличить с помощью следующих двух простых утверждений.

Сумма $x_n + y_n$ и разность $x_n - y_n$ бесконечно малых последовательностей x_n и y_n также бесконечно малы.

В самом деле, если $\varepsilon > 0$, то для всех достаточно больших номеров n выполняются неравенства $|x_n| < \varepsilon/2$ и $|y_n| < \varepsilon/2$, а значит, $|x_n \pm y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \varepsilon$, что и доказывает наше утверждение.

Если последовательность c_n ограничена, а x_n бесконечно мала, то и последовательность $c_n x_n$ бесконечно мала.

Чтобы убедиться в этом, найдем сначала такое число $c > 0$, что $|c_n| < c$ для всех n . Какое бы теперь ни взять $\varepsilon > 0$, наступит момент, после которого $|x_n| < \varepsilon/c$, и тогда $|c_n x_n| < \varepsilon$, что и требовалось.

Четыре несложных утверждения, которые составляют содержание следующей теоремы, отражают важное свойство *непрерывности* четырех арифметических действий: если в арифметическом выражении чуть-чуть изменить все входящие в него числа, значение этого выражения тоже почти не изменится. Здесь самое время подчеркнуть, что последовательность x_n сходится к числу a в том и только том случае, когда разность $x_n - a$ бесконечно мала.

Т е о р е м а. Пусть $x_n \rightarrow a$ и $y_n \rightarrow b$. Тогда $x_n \pm y_n \rightarrow a \pm b$ и $x_n y_n \rightarrow a b$. Если b и все y_n отличны от нуля, то $x_n/y_n \rightarrow a/b$.

Доказательство. Выражение в правой части равенства

$$(x_n \pm y_n) - (a \pm b) = (x_n - a) \pm (y_n - b)$$

представляет собой алгебраическую сумму двух бесконечно малых, а значит, стремится к нулю. Этим доказаны наши утверждения о пределе суммы и разности двух последовательностей. Вопрос о пределе произведения исчерпывается также легко, если заметить, что оба слагаемые справа от равенства

$$x_n y_n - a b = x_n (y_n - b) + b (x_n - a)$$

бесконечно малы как результаты умножения бесконечно малых последовательностей на ограниченные: сходящуюся — в первом случае, постоянную — во втором. Пусть, наконец, $b \neq 0$. Тогда, начиная с определенного момента,

$$|y_n - b| < \frac{|b|}{2}, \quad \text{откуда} \quad |y_n| > \frac{|b|}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|}.$$

Поэтому первый сомножитель в выражении справа от равенства

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b y_n} \cdot (b x_n - a y_n)$$

ограничен. Второй же, как вытекает из уже доказанных утверждений, бесконечно мал. Вывод нам уже известен. Теорема доказана.

Вопрос 4. *Монотонные последовательности — определение и примеры. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Приложение: принцип вложенных отрезков.*

Две классические теоремы, каждая из которых по своему отражает свойство полноты числовой прямой, нам уже известны — это теорема Дедекинда и теорема о точных границах. В анализе есть еще ряд важных теорем на эту тему. Они гарантируют, при тех или иных условиях, существование предела у числовой последовательности. Одна из них — *теорема Вейерштрасса* о монотонных последовательностях, которую мы теперь и обсудим.

Последовательность вещественных чисел x_n называют *неубывающей*, если $x_{n+1} \geq x_n$ для всех номеров n . Если же $x_{n+1} \leq x_n$ для каждого n , последовательность x_n считают *невозрастающей*. Общее название для этих переменных — *монотонные последовательности*. Если здесь нестрогие неравенства заменить строгими, мы получим определения *возрастающих* и, соответственно, *убывающих* последовательностей, вместе образующих класс *строго монотонных* последовательностей. Тривиальный пример: постоянная последовательность одновременно неубывающая и невозрастающая. Менее тривиальный пример: последовательности

$$\frac{n-1}{n} \quad \text{и} \quad \frac{n+1}{n}.$$

Первая из них возрастает, вторая — убывает. Обе они, каждая со своей стороны, стремятся к 1. Наконец, совсем нетривиальный пример: первая из последовательностей

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{и} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

возрастает, вторая же — убывает. Обе они, как мы знаем, стремятся к знаменитому числу e .

Т е о р е м а. *Каждая монотонная последовательность имеет предел. Этот предел конечен, если последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть c означает точную верхнюю границу всех элементов неубывающей последовательности x_n . Тогда $x_n \leq c$ для всех номеров n . С другой стороны, если $c' < c$, то c' уже не может быть верхней границей нашей последовательности, поскольку наименьшая из них равна c . Это значит, что хотя бы один ее элемент x_N строго больше c' . Но тогда и $x_n > c'$ для всех номеров $n \geq N$. Таким образом, $x_n \rightarrow c$. Аналогичные рассуждения показывают, что невозрастающая последовательность стремится к своей нижней грани. Нам остается заметить, что ограниченные последовательности обладают конечными границами. Теорема доказана.

Интересно отметить, что одного лишь факта, что предел у данной последовательности есть, часто бывает достаточно, чтобы этот предел вычислить! Пусть, например, $x_n = n/2^n$. Нетрудно убедиться, что $x_{n+1} < x_n$, если $n > 1$. Поскольку, к тому же, последовательность x_n положительна, она имеет конечный предел, и пусть он

равен l . Но если $x_n \rightarrow l$, то, очевидно, и $x_{n+1} \rightarrow l$. При этом

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2n} \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2n} x_n.$$

Отсюда мгновенно следует, что

$$l = \lim x_{n+1} = \lim \frac{n+1}{2n} \lim x_n = \frac{1}{2} l,$$

а значит, $l = 0$.

Как мы видели, все элементы монотонной последовательности x_n расположены с одной стороны от ее предела c . Точнее, $x_n \leq c$, если последовательность неубывает, и $x_n \geq c$ для невозрастающей последовательности. Все эти неравенства обычно строгие, и только в том случае, когда последовательность с какого-то момента стабилизируется, в дальнейшем уже не меняясь, ее элементы совпадают с их пределом, и неравенства переходят в точные равенства.

Примером «теоретического» приложения теоремы Вейерштрасса может служить *принцип вложенных отрезков*. Так иногда называют следующую замечательную теорему Кантора, которая в определенном смысле эквивалентна теореме Дедекинда, но несколько иначе выражает свойство полноты числовой прямой.

Т е о р е м а. *Предположим, что две монотонные последовательности a_n и b_n стремятся навстречу одна к другой:*

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

Мы утверждаем, что между ними всегда остается хотя бы одна точка c , разделяющая их элементы в том смысле, что $a_n \leq c \leq b_n$ для всех n . Если при этом еще $b_n - a_n \rightarrow 0$, так что наши последовательности неограниченно сближаются, такая точка c ровно одна и служит их общим пределом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Доказательство. Поскольку последовательности a_n и b_n , очевидно, ограничены, их пределы a и b конечны. Теорема о предельном переходе в неравенстве, показывает нам, что $a \leq b$. Как отмечалось

выше, все элементы a_n находятся слева от a , в то время как все b_n располагаются справа от b . Поэтому каждая точка c из отрезка $a \leq c \leq b$ разделяет наши последовательности. Наконец, расстояние от любой такой точки c до границ a_n и b_n содержащего ее отрезка не больше его длины $b_n - a_n$, и если она бесконечно мала, то $a_n \rightarrow c$ и $b_n \rightarrow c$. Теорема доказана.

Принцип вложенных отрезков имеет яркие приложения как в анализе, так и в других областях математики. Хотя это и *не входит в программу экзамена*, здесь невозможно удержаться и не сказать хотя бы несколько слов о такой важной вещи, как сравнение множеств по их *мощности*. Два множества называют *равномощными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. В частности, *конечными* считают множества, равномощные начальным отрезкам натурального ряда. Множество называют *счетным*, если оно равномощно всему натуральному ряду. Про множества, совпадающие по мощности с числовой прямой, говорят, что они имеют мощность *континуум*.

Расширение или сужение конечного множества обязательно приводит к увеличению или уменьшению его мощности. Для бесконечных множеств дело обстоит совершенно иначе. Так, множество одних только четных натуральных чисел равномощно всему натуральному ряду, поскольку удвоение числа, очевидно, представляет собой взаимно однозначное отображение. С другой стороны, всех целых чисел ровно «столько же, сколько» натуральных. Вот более содержательный пример: множество всех рациональных чисел, хотя и «всюду плотно» расположено на числовой прямой, всего лишь счетно.

В качестве примера рассуждений, опирающихся на принцип вложенных отрезков, приведем доказательство одной знаменательной теоремы, также принадлежащей родоначальнику теории множеств *Георгу Кантору*. С учетом предыдущего примера, она показывает, что пополнение рациональных чисел иррациональными не просто расширяет состав числовой системы, но увеличивает ее мощность.

Т е о р е м а. *Никаким способом нельзя отобразить натуральный ряд на всю числовую прямую.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное отображение f натурального ряда в числовую прямую. Наша задача — показать, что не все вещественные числа попадают в область значений такого отображения. Выберем с этой целью какой-нибудь отрезок I_1 , имеющий

ненулевую длину и не содержащий числа $f(1)$. Затем уже в нем найдем меньший отрезок I_2 , тоже ненулевой длины, который не содержит числа $f(2)$. Продолжая этот процесс до бесконечности, мы получим последовательность отрезков I_n , удовлетворяющую двум условиям: $I_{n+1} \subset I_n$ и $f(n) \notin I_n$ для всех n . Первое из них означает, что на прямой существует точка c , принадлежащая всем отрезкам I_n , а тогда второе условие показывает нам, что $f(n) \neq c$, какой бы ни была номер n . Теорема доказана.

Вопрос 5. *Подпоследовательности и частичные пределы — определения, примеры. Теорема Больцано — Вейерштрасса о частичных пределах.*

Рассмотрим произвольную последовательность

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

Если мы выберем еще бесконечный ряд возрастающих номеров

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots,$$

у нас появится возможность составить новую последовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_k}, \dots$$

Ее называют *подпоследовательностью* нашей первоначальной последовательности. Ясно, что из одной последовательности, вообще говоря, можно получить бесконечно много различных подпоследовательностей.

Л е м м а. *Если натуральные числа n_k строго возрастают вместе с индексом k , то $n_k \geq k$ для всех k .*

Доказательство. Наименьшим натуральным числом является единица, а значит, $n_1 \geq 1$. Если допустить, что $n_k \geq k$ при некотором k , и воспользоваться условием $n_{k+1} > n_k$, мы придем к неравенству $n_{k+1} > k$. Но наименьшее из натуральных чисел, строго больших k , есть число $k + 1$. Поэтому $n_{k+1} \geq k + 1$. Лемма доказана.

Т е о р е м а. *Если последовательность имеет предел, конечный или бесконечный — все равно, он же служит пределом и любой ее подпоследовательности.*

Доказательство. Предположим, что $x_n \rightarrow c$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $c' < c$. Тогда найдется такой номер N , что $x_n > c'$ для всех $n \geq N$. Но $n_k \geq N$ при $k \geq N$, как показывает предыдущая лемма, а значит, и $x_{n_k} > c'$ для всех $k \geq N$. Аналогичные соображения приводят нас к следующему выводу: если $c < c''$, то и $x_{n_k} < c''$ для всех достаточно больших номеров k . Теорема доказана.

Разумеется, та или иная подпоследовательность может иметь предел и в том случае, когда у исходной последовательности его нет. Например, если $x_n = (-1)^n$, то подпоследовательности $x_{2n-1} \equiv -1$ и $x_{2n} \equiv +1$ имеют пределы, а x_n никуда не стремится. Но самое интересное заключается в том, что подпоследовательности, имеющие пределы, существуют всегда. Нетривиальная часть этого утверждения составляет содержание *теоремы Больцано – Вейерштрасса*.

Т е о р е м а. *Из любой ограниченной вещественной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть все элементы ограниченной последовательности x_n заключены в отрезке I_1 . Очевидно, можно указать отрезок I_2 , лежащий в I_1 и имеющий вдвое меньшую длину, в котором найдутся элементы x_n со сколь угодно большими номерами n . Этот процесс можно продолжать неограниченно. В результате у нас возникнет последовательность вложенных отрезков I_n , в каждом из которых есть элементы с такими большими номерами, какие мы только можем пожелать. Теперь приступим к выбору номеров для будущей подпоследовательности. В качестве n_1 можно взять любое натуральное число, поскольку всегда $x_{n_1} \in I_1$. Затем мы найдем уже строго больший его номер n_2 , для которого $x_{n_2} \in I_2$, и т. д. Так мы построим подпоследовательность x_{n_k} , поведение которой при $k \rightarrow \infty$ полностью определяется включением $x_{n_k} \in I_k$. Действительно, отрезки I_k в пределе, очевидно, сжимаются в точку. Иными словами, согласно принципу вложенных отрезков, существует число c , которое служит общим пределом для левых и правых концов отрезков I_k , но тогда, по теореме о зажатой последовательности, и $x_{n_k} \rightarrow c$. Теорема доказана.

Предел, к которому стремится какая-нибудь подпоследовательность, считают *частичным пределом* исходной последовательности. Так, у знакомой нам последовательности $(-1)^n$ частичными пределами служат числа ± 1 и, очевидно, только они. Заметим, что из

последовательности, не ограниченной сверху, легко выбрать подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$. Для последовательности, не ограниченной снизу, роль ее частичного предела всегда выполняет, например, $-\infty$. Таким образом, мы приходим к следующему утверждению, которое по существу равносильно классической теореме Больцано — Вейерштрасса, но выражает ее в иных терминах и лишь немногим дополняет ее.

Т е о р е м а. *Каждая последовательность вещественных чисел имеет хотя бы один частичный предел.*

Завершая тему, отметим, что у любой последовательности вещественных чисел среди ее частичных пределов есть наименьший и наибольший. Их называют соответственно *нижним* и *верхним* пределами последовательности. Их равенство служит необходимым и достаточным условием существования «настоящего» предела. Все это очень увлекательно, хотя и очевидно, но главное — не входит в программу экзамена.

Вопрос 6. *Вещественные последовательности, удовлетворяющие условию Коши, и критерий Коши.*

Говорят, что вещественная последовательность x_n удовлетворяет *условию Коши*, если разность $x_k - x_l$ стремится к нулю, когда индексы k и l «независимо друг от друга» стремятся к бесконечности. Иными словами, для каждого $\varepsilon > 0$ должен существовать такой номер N , что $|x_k - x_l| < \varepsilon$, как только $k \geq N$ и $l \geq N$.

Примером последовательности, очевидно, удовлетворяющей условию Коши, может служить любая сходящаяся последовательность. В самом деле, если x_n сходится к числу a , то для каждого $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать такой номер N , что $|x_n - a| < \varepsilon/2$ для всех $n \geq N$. В таком случае, если $k, l \geq N$, то

$$|x_k - x_l| \leq |x_k - a| + |x_l - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Оказывается, других примеров нет — в этом смысл следующей теоремы, которую называют *критерием Коши* сходимости последовательности вещественных чисел.

Т е о р е м а. *Последовательность вещественных чисел сходится тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши.*

Л е м м а 1. Последовательность, удовлетворяющая условию Коши ограничена.

Доказательство. Пусть речь идет о последовательности x_n . Согласно условию Коши, найдется, в частности, такой номер N , что $|x_n - x_N| < 1$ для всех $n \geq N$. Отсюда следует, что $|x_n| < |x_N| + 1$, когда $n \geq N$, а тогда и все элементы x_n ограничены в совокупности. Лемма доказана.

Л е м м а 2. Если последовательность удовлетворяет условию Коши, а какая-то ее подпоследовательность сходится к некоторому числу, то и вся последовательность сходится к тому же числу.

Доказательство. Пусть последовательность x_n удовлетворяет условию Коши, а ее подпоследовательность x_{n_k} стремится к числу a , когда $k \rightarrow \infty$. Если $\varepsilon > 0$, то можно найти такие номера N и k , что $|x_n - x_N| < \varepsilon/3$ для всех $n \geq N$ и $|x_{n_k} - a| < \varepsilon/3$. Разумеется, при этом можно считать, что $n_k \geq N$, а тогда $|x_{n_k} - x_N| < \varepsilon/3$. Итак,

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_N| + |x_N - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

для всех $n \geq N$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Если последовательность сходится, то она удовлетворяет условию Коши. Это мы уже знаем. Пусть, напротив, нам известно, что последовательность удовлетворяет условию Коши. В таком случае, согласно лемме 1, она ограничена. В силу теоремы Больцано — Вейерштрасса, из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Но тогда, как показывает лемма 2, сходится и вся наша последовательность. Теорема доказана.

Это доказательство можно было бы считать замечательным и даже красивым, если бы не одно печальное обстоятельство — оно имеет концептуальный изъян. Дело в том, что оно использует теорему Больцано — Вейерштрасса, а это значит, выражаясь топологическим языком, локальную *компактность* числовой прямой. Между тем, дело здесь вовсе не в компактности, а в *полноте*. Этим свойством полноты обладает большинство пространств, важных, в частности, для функционального анализа, которые имеют бесконечную размерность и в которых замкнутые ограниченные множества вовсе не компактны. Поэтому мы приведем еще одно доказательство критерия Коши, на наш взгляд, не менее симпатичное, но свободное от указанного недостатка.

Геометрический смысл условия Коши очевиден: если последовательность x_n удовлетворяет этому условию, можно построить сколь угодно малый отрезок, заключающий в себе «почти» всю нашу последовательность, а точнее, все ее элементы x_n с достаточно большими номерами n . Найдем сначала такой отрезок I_1 , у которого длина, скажем, меньше единицы. Поскольку и в нем элементы x_n продолжают неограниченно сближаться, наступит момент, когда они окажутся в меньшем отрезке I_2 , содержащемся в предыдущем и имеющем вдвое меньшую длину. Повторяя эти рассуждения до бесконечности, мы построим последовательность вложенных отрезков I_m , каждый из которых содержит почти все элементы последовательности и имеет длину меньше 2^{-m} . Вспоминая о принципе вложенных отрезков, мы заключаем, что концы наших отрезков стремятся к некоторому общему конечному пределу c . Если теперь $\varepsilon > 0$, мы сначала найдем такой номер m , что $2^{-m} < \varepsilon$, а затем дождемся счастливого момента, когда для всех n , начиная с него, $x_n \in I_m$, а значит, $|x_n - c| < \varepsilon$. Таким образом, $x_n \rightarrow c$, так что из условия Коши вытекает сходимость. Обратное заключение очевидно, и мы о нем уже говорили. Теорема еще раз доказана.

Критерий Коши служит важным средством доказательства разнообразных теорем анализа, но бывает полезным и в конкретных вопросах. Рассмотрим два примера такого рода.

Пусть числа a, b и c , для простоты, положительны. Число c называют *средним гармоническим* чисел a и b , если

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Например, в последовательности обратных к натуральным числам n величин n^{-1} каждый член, начиная со второго, представляет собой среднее гармоническое своих соседей слева и справа. Поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$$

называют гармоническим. *Сумма* его определяется как предел последовательности его *частичных сумм*. Каждая такая сумма s_n есть сумма первых n членов ряда. Заметим, что

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, условие Коши здесь не выполнено, так что последовательность s_n не относится к числу сходящихся. Но она возрастает, а значит, имеет предел. В силу сказанного, он равен $+\infty$. Иными словами, сумма гармонического ряда бесконечна.

На роль второго примера мы возьмем еще один симпатичный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots,$$

исследование которого тоже проведем с помощью критерия Коши. Пусть s_n будут теперь его частичными суммами. Считая пока, исключительно для удобства записи, что k несколько больше l , посчитаем и оценим разность $s_k - s_l$. А именно, заметим, что

$$s_k - s_l = \frac{1}{(l+1)^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < \frac{1}{l(l+1)} + \dots + \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{l} - \frac{1}{k}.$$

Таким образом, мы приходим к оценке

$$|s_k - s_l| \leq \left| \frac{1}{l} - \frac{1}{k} \right|,$$

справедливой, как легко видеть, уже для любых натуральных k и l , из чего следует, что последовательность s_n сходится к некоторому конечному пределу. Его и считают суммой нашего ряда. На самом деле она равна $\pi^2/6$, но доказательство этого требует привлечения довольно глубоких идей, например, знаменитой теоремы Ляпунова из теории рядов Фурье...

Вопрос 7. *Точка сгущения числового множества и предел функции в такой точке — определения для случаев конечного и бесконечных пределов обоих знаков, примеры на каждый случай.*

Рассмотрим на числовой прямой два объекта — точку a и множество X . Представим себе такую ситуацию, что как угодно близко от точки a можно найти отличную от нее точку, принадлежащую множеству X . В таком случае мы будем говорить, что множество X *сгущается в точке a* . В строгих выражениях это значит, что для каждого числа $\delta > 0$ должна найтись точка $x \in X$, для которой $0 < |x - a| < \delta$. Точку, где сгущается данное множество, называют его *точкой сгущения* или *предельной точкой*.

Предельная точка множества вовсе не обязана ему принадлежать. Например, для интервала точками сгущения служат не только все его элементы, но еще две его граничные точки. С другой стороны, одной лишь принадлежности точки данному множеству явно не достаточно для того, чтобы она была его предельной точкой. Примером может служить любое конечное множество, которое не имеет ни одной точки сгущения, как бы много элементов оно ни содержало.

Пусть на множестве X , которое сгущается в точке a , задана функция f . Число l называют *пределом функции f в точке a* , и пишут

$$l = \lim_a f = \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

если для каждого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что для всех точек $x \in X$, для которых $0 < |x - a| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$. Сказанное в этой строгой фразе имеет простой смысл: если точки x немного отличаются от a , то соответствующие им значения $f(x)$ близки к l . То же самое выражают формулой « $f(x) \rightarrow l$ при $x \rightarrow a$ », говоря при этом, что $f(x)$ *стремится* к числу l , когда x стремится к точке a .

Такие же обозначения и термины применяют и в том случае, когда функция имеет в данной точке бесконечный предел. Например, говорят, что при $x \rightarrow a$ функция $f(x)$ стремится к $-\infty$, или $-\infty$ служит ее пределом, если для любого вещественного числа E можно найти $\delta > 0$ так, что $f(x) < E$ всякий раз, когда точка $x \in X$ удовлетворяет двум неравенствам $0 < |x - a| < \delta$. Аналогично, если значения функции $f(x)$ превосходят любое наперед заданное число, когда ее аргумент x оказывается в достаточной близости от a , функцию считают стремящейся к $+\infty$, а сам этот символ называют ее пределом в точке a .

Что касается примеров «на каждый случай», о которых идет речь в билете, то они должны лишь проиллюстрировать все описанные выше ситуации. Они могут быть тривиальными или содержательными — все равно. Например, можно рассмотреть функцию

$$f(x) := \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^2},$$

определенную при $|x| \neq 1$, которая имеет пределы в каждой точке расширенной числовой прямой. В частности,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty.$$

Здесь все очевидно. Можно привести «нетривиальные» примеры, когда предел конечен:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Для украшения ответа на вопрос можно заметить, что бесконечные пределы получатся в следующих «интересных» случаях:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln |x| = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \operatorname{tg}^2 x = +\infty.$$

Разумеется, совсем неплохо иметь перед глазами графики всех упомянутых здесь функций.

Вопрос 8. Точка, в которой числовое множество сгущается с той или иной стороны, и соответствующий односторонний предел функции в такой точке — определения для случаев конечного и бесконечных пределов обоих знаков, примеры на каждый случай.

Как и в предыдущем вопросе, рассмотрим на числовой прямой точку a и множество X . Будем говорить, что множество X сгущается в точке a слева, если для каждого числа $\delta > 0$ найдется такая точка $x \in X$, что $a - \delta < x < a$.

Пусть на множестве X , которое сгущается в точке a слева, задана функция f . Число l называют *пределом функции f в точке a слева*, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что для всех точек $x \in X$, удовлетворяющих условиям $a - \delta < x < a$, справедливо неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Для левостороннего предела приняты два выразительных обозначения, а именно: в указанной только что ситуации пишут

$$l = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \quad \text{или} \quad l = f(a-0),$$

То же самое выражают формулой « $f(x) \rightarrow l$ при $x \rightarrow a - 0$ », говоря при этом, что $f(x)$ стремится к числу l , когда x стремится к точке a слева. Разумно, что здесь упоминание об a опускают, когда $a = 0$.

Такие же обозначения и термины применяют и в том случае, когда функция имеет в данной точке бесконечный левосторонний предел. Например, говорят, что при $x \rightarrow a - 0$ функция $f(x)$ стремится

к $-\infty$, или $-\infty$ служит ее пределом в точке a слева, если для любого вещественного числа E можно найти $\delta > 0$ так, что $f(x) < E$ всякий раз, когда точка $x \in X$ удовлетворяет неравенствам $a - \delta < x < a$. Аналогично, если значения функции $f(x)$ превосходят любое наперед заданное число, когда ее аргумент x оказывается в достаточной близости от точки a и слева от нее, говорят, что $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow a - 0$, считая при этом символ $+\infty$ ее пределом в точке a слева.

Теперь — о правосторонних пределах. Разумеется, здесь все аналогично, но могут возникнуть недоразумения. Словом, проще все повторить чем объяснять, почему не хочется. Впрочем, есть шанс, что экзаменатору тоже не захочется слушать... Итак, мы снова на числовой прямой, вместе с ее точкой a и подмножеством X . Будем говорить, что множество X *сгущается в точке a справа*, если для каждого числа $\delta > 0$ найдется такая точка $x \in X$, что $a < x < a + \delta$.

Пусть на множестве X , которое сгущается в точке a справа, задана функция f . Число l называют *пределом функции f в точке a справа*, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что для всех точек $x \in X$, удовлетворяющих условиям $a < x < a + \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Для правостороннего предела тоже приняты два выразительных обозначения, а именно: в указанной только что ситуации пишут

$$l = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad \text{или} \quad l = f(a+0),$$

То же самое выражают формулой « $f(x) \rightarrow l$ при $x \rightarrow a+0$ », говоря при этом, что $f(x)$ стремится к числу l , когда x стремится к точке a справа. Здесь также упоминание об a опускают, когда $a = 0$.

Такие же обозначения и термины применяют и в том случае, когда функция имеет в данной точке бесконечный правосторонний предел. Например, говорят, что при $x \rightarrow a+0$ функция $f(x)$ стремится к $-\infty$, или $-\infty$ служит ее пределом в точке a справа, если для любого вещественного числа E можно найти $\delta > 0$ так, что $f(x) < E$ всякий раз, когда точка $x \in X$ удовлетворяет неравенствам $a < x < a + \delta$. Аналогично, если значения функции $f(x)$ превосходят любое наперед заданное число, когда ее аргумент x оказывается в достаточной близости от точки a и справа от нее, говорят, что $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow a+0$, считая при этом символ $+\infty$ ее пределом в точке a справа.

Примеров для иллюстрации описанных ситуаций, как легко понять, должно быть, как минимум, шесть. Задание, надо прямо сказать, не слишком увлекательное, но поскольку его не избежать, можно пошутить. Скажем, придумать функцию, которая «обслуживала» бы все сразу. Например, пусть

$$f(x) := \frac{\operatorname{sgn}^2 x}{1 - x^2}, \quad |x| \neq 1.$$

Посчитаем левосторонние пределы этой функции в точках 0 и ± 1 :

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = -\infty.$$

Правосторонние ее пределы в тех же точках таковы:

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = +\infty.$$

Разумеется, ваш ответ будет ярче, если дополнить его рисунком.

Завершая ответ на вопрос об односторонних пределах, пожалуй, стоит обратить внимание на следующее обстоятельство. Если область определения функции сгущается в той или иной точке прямой с обеих сторон, то мы получаем возможность говорить о пределе в трех смыслах: о двух односторонних и одном двустороннем. В такой ситуации, очевидно, существование равных односторонних пределов является необходимым и достаточным условием существования двустороннего, и если оно выполнено, все три предела равны.

Вопрос 9. *Предел функции одной переменной, когда ее аргумент стремится к той или иной бесконечности, — определения для случаев конечного и бесконечных пределов обоих знаков, примеры на каждый случай.*

Понятие предельной точки имеет смысл расширить, когда речь идет о неограниченном подмножестве вещественной прямой. А именно, мы будем считать $-\infty$ предельной точкой каждого множества, которое не ограничено снизу, а $+\infty$ будет служить предельной точкой любого неограниченного сверху множества.

Например, натуральный ряд не сгущается нигде, обладая лишь бесконечно удаленной предельной точкой $+\infty$. Для множества всех целых чисел обе точки $\pm\infty$ являются предельными.

Если функция f задана на неограниченном множестве X , можно поставить вопрос о поведении ее на бесконечности. Пусть, для определенности, множество X неограничено сверху. Число l называют *пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$* в том случае, если для каждого $\varepsilon > 0$ на прямой можно найти такую точку A , что для всех точек $x \in X$, лежащих справа от A , выполнено неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$. Далее, мы говорим, что функция $f(x)$ *стремится к $-\infty$ при $x \rightarrow +\infty$* , если для каждого числа E найдется такое число A , что $f(x) < E$, когда $x \in X$ и $x > A$. Наконец, для полноты картины, уточним еще, когда функцию $f(x)$ считают *стремящейся к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$* . Для этого нужно, чтобы каждому числу E можно было сопоставить такое число A , что $f(x) > E$ для всех точек $x \in X$, удовлетворяющих условию $x > A$.

Аналогично может быть определено понятие предела функции при «неограниченном убывании» ее аргумента, когда она задана на неограниченном снизу множестве. Для обозначения пределов на той или иной бесконечности применяют следующие символы:

$$f(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{и} \quad f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих описанные выше ситуации. Это легко. Вот конечные пределы на бесконечностях:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Вот пример, когда пределы бесконечны, причем знаки предельных значений функции и ее аргумента совпадают:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty.$$

А вот пример, когда — наоборот:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1-x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1-x} = -\infty.$$

Полезно подчеркнуть, что рассмотренные здесь конструкции включают в себе и понятие предела последовательности — достаточно вспомнить, что вещественная последовательность представляет собой функцию, определенную на неограниченном сверху множестве

натуральных чисел. В свою очередь, общее понятие предела, как нетрудно убедиться, можно свести к указанному его частному случаю. Впрочем, это уже вопрос из другого билета...

Вопрос 10. *Подход Гейне к понятию предела функции одной переменной, его эквивалентность подходу Коши.*

Изложенную выше точку зрения на предел связывают с именем Коши. Другой, эквивалентный подход к этому же вопросу, принадлежащий Гейне, основан на привлечении уже известного нам понятия предела последовательности. Представляя одну и ту же мысль в разных аспектах, эти два определения позволяют нам глубже усвоить идею предельного перехода, а кроме того, дают возможность выбора оптимального способа рассуждений при доказательстве разнообразных утверждений о пределах.

Т е о р е м а. *Точка расширенной числовой прямой служит предельной точкой того или иного множества вещественных чисел в том и только том случае, когда она может быть представлена в виде предела некоторой последовательности отличных от нее элементов этого множества.*

Доказательство. Если множество X сгущается в конечной точке a , то для каждого натурального n найдется такой элемент $x_n \in X$, что $0 < |x_n - a| < 1/n$, и тогда $x_n \rightarrow a$. Если же множество X неограничено с одной из сторон, то в нем найдется последовательность элементов, стремящаяся к бесконечности соответствующего знака. Обратные утверждения еще более очевидны. Теорема доказана.

Т е о р е м а. *Пусть точка x_* расширенной числовой прямой является предельной для множества X , где задана функция f . Мы утверждаем, что функция f имеет в точке x_* предел l_* в том и только том случае, когда $f(x_n) \rightarrow l_*$, какова бы ни была последовательность отличных от x_* точек $x_n \in X$, стремящаяся к x_* .*

Звездочки в этой теореме напоминают нам о том, что x_* и l_* могут быть как обычными точками числовой прямой, так и бесконечностями того или иного знака. Таким образом, мы имеем здесь девять вариантов, в каждом из которых понятие предела, в содержательном плане единое во всех случаях, все же обладает своей, специфической окраской, вызывая в нашем воображении характерные для данной

ситуации картинки и примеры. Ясно, что логика рассуждений, тем не менее, везде одинакова, и мы вправе для ее иллюстрации выбрать какую-нибудь одну из имеющихся девяти комбинаций.

Доказательство. Пусть x_* и l_* будут обыкновенными вещественными числами, и мы обозначим их соответственно буквами a и l , чтобы не создавать себе лишних неудобств.

Предположим сначала, что $f(x) \rightarrow l$ при $x \rightarrow a$, и возьмем произвольную последовательность $x_n \in X$, удовлетворяющую двум условиям: $x_n \neq a$ для всех n и $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$. Нам нужно доказать, что тогда $f(x_n) \rightarrow l$. Но если $\varepsilon > 0$, то найдется такое число $\delta > 0$, что $|f(x) - l| < \varepsilon$, как только $x \in X$ и $0 < |x - a| < \delta$, а вслед за этим мы можем найти такой номер N , что $|x_n - a| < \delta$, когда $n \geq N$. Так как при этом все точки x_n принадлежат множеству X и отличны от a , то мы приходим к нужному выводу: $|f(x_n) - l| < \varepsilon$ при $n \geq N$.

Обратное утверждение мы будем доказывать «методом», который иные называют неприятными для доброй природы словами «от противного», хотя всегда полезно поупражняться в логике. Итак, пусть $f(x)$ не стремится к l , когда $x \rightarrow a$. Это значит, что не для каждого $\varepsilon > 0$ найдется соответствующее $\delta > 0$. Иными словами, существуют такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для каждого $\delta > 0$ мы можем указать хотя бы одну точку $x(\delta) \in X$, удовлетворяющую условиям $0 < |x(\delta) - a| < \delta$, но для которой, все-таки, $|f(x(\delta)) - l| \geq \varepsilon_0$. Полагая теперь $x_n = x(1/n)$ для каждого номера n , мы получаем последовательность отличных от a точек множества X , которая обладает двумя интересными для нас свойствами: она стремится к a , но отвечающая ей последовательность $f(x_n)$ не сходится к числу l , всегда оставаясь от него на расстоянии, не меньшем ε_0 . Теорема доказана.

Возможно, стоит обратить внимание на то обстоятельство, что в теореме не говорится об односторонних пределах. Между тем, это важное понятие, а кроме того, ясно, что и в этом случае возможны и эквивалентны подходы Коши и Гейне. Разумеется, и рассуждения все те же. Смысл наших замечаний в следующем — односторонние пределы в теореме есть! Дело вот в чем. Если множество X , где задана функция f , сгущается в точке a , скажем, с левой стороны, мы определим новое множество X_l , включая в него все точки из X , лежащие строго слева от a , и определим на нем «новую» функцию f_l , совпадающую с прежней на этом новом множестве, т. е. представляющую собой *сужение* функции f на множество X_l . Совершенно

аналогично можно определить множество X_r и функцию f_r в случае, когда X сгущается в точке a справа. Сопоставляя определения, мы можем заметить, что

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_l(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_r(x).$$

Иными словами, понятия односторонних пределов, с формальной точки зрения, представляют собой частные случаи понятия самого «обычного» предела.

Вопрос 11. *Арифметические свойства предела функции одной переменной. Для ответа выберите один из пяти обсуждавшихся в курсе вариантов поведения аргумента функции.*

Удивительно, но когда нам нужно вычислить предел арифметического выражения, у которого составляющие имеют известные пределы, мы без колебаний и сомнений просто заменяем эти составляющие их предельными значениями, а затем производим нужные арифметические действия над конкретными числами. Например,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} = \frac{1^2 - 1 + 1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Нам важно лишь одно — чтобы нигде ни разу не пришлось делить на ноль. Быть может, причина такой уверенности — врожденное чувство непрерывности? А может, напротив, *отсутствие* чего-то, что предполагает не доверчивость, но самостоятельность, ответственность и логику... Во всяком случае, любому из нас приятно и спокойно, когда мы знаем, что правомерность наших поступков допускает математическое подтверждение.

Т е о р е м а. *Если функции f и g определены на общем множестве, для которого x_* служит предельной точкой, и имеют в этой точке конечные пределы λ и μ , то их сумма, разность, произведение, а также отношение, при условии, что знаменатель всюду отличен от нуля, как и его предел, также имеют в точке x_* конечные пределы, которые можно посчитать по формулам:*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_*} [f(x) + g(x)] &= \lambda + \mu, & \lim_{x \rightarrow x_*} [f(x) - g(x)] &= \lambda - \mu, \\ \lim_{x \rightarrow x_*} f(x)g(x) &= \lambda\mu, & \lim_{x \rightarrow x_*} f(x)/g(x) &= \lambda/\mu. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть последовательность x_n отличных от x_* точек из области определения функций f и g , стремится к x_* . Тогда, как мы знаем, $f(x_n) \rightarrow \lambda$ и $g(x_n) \rightarrow \mu$, и нам остается воспользоваться соответствующими теоремами об арифметических свойствах предела последовательности. Теорема доказана.

Нам осталось заметить, что столь короткое доказательство важной теоремы оказалось возможным лишь благодаря тому, что мы уже изучили аналогичный вопрос для простейших переменных, какими являются последовательности вещественных чисел, и доказали эквивалентность подходов Коши и Гейне к понятию предела функции. Словом, мы опирались на результаты уже проведенной нами немалой работы...

Вопрос 12. *Порядковые свойства предела функции одной переменной. Для ответа выберите один из пяти обсуждавшихся в курсе вариантов поведения аргумента функции.*

Теоремы, которые мы сейчас обсудим, уже имеют аналоги в теории предела последовательности и представляют естественные их обобщения. В отличие от предыдущего вопроса, где речь шла об арифметических свойствах предельного перехода и было удобно воспользоваться подходом Гейне, здесь мы будем опираться на определение Коши и повторим логическую схему наших рассуждений, относящихся к последовательностям.

Т е о р е м а. *Пусть функции f и g имеют пределы λ и μ в некоторой предельной точке x_* их совместной области определения X . Если $\lambda > \mu$, то и $f(x) > g(x)$ для всех точек $x \in X$, отличных от точки x_* и «достаточно близких» к ней.*

Здесь выражение в кавычках очень удачно — оно: (1) интуитивно понятно; (2) допускает абсолютно точное истолкование; (3) позволяет избежать математического занудства в речи.

Например, если в теореме под x_* понимается число, то утверждается следующее: найдется такое $\delta > 0$, что $f(x) > g(x)$ для всех точек $x \in X$, удовлетворяющих условиям $0 < |x - x_*| < \delta$. Если же $x_* = -\infty$ или $x_* = +\infty$, то утверждение звучит так: можно указать такое число A , что $f(x) > g(x)$ для всех точек $x \in X$, лежащих слева или, соответственно, справа от A .

Доказательство. Выберем число ν из интервала $\lambda > \nu > \mu$ и заметим, что, согласно определениям Коши, для конечных пределов или бесконечных — все равно, для всех точек $x \in X$, отличных от точки x_* и «достаточно близких» к ней, должны одновременно выполняться неравенства $f(x) > \nu$ и $\nu > g(x)$, а значит, $f(x) > g(x)$. Теорема доказана.

Т е о р е м а. Пусть функции f и g имеют пределы в некоторой предельной точке x_* их совместной области определения. Если как угодно близко от точки x_* можно найти отличные от нее точки x , для которых $f(x) \leq g(x)$, то и

$$\lim_{x \rightarrow x_*} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_*} g(x).$$

Доказательство. Если предел f больше предела g , то, согласно предыдущей теореме, для всех точек x из области определения наших функций, отличных от точки x_* и достаточно близких к ней, должно выполняться неравенство $f(x) > g(x)$, вопреки имеющемуся у нас условию. Теорема доказана.

Здесь уместно и просто необходимо обратить внимание на принципиально важный момент. Из последней теоремы, если формально применить ее к ситуации, когда $f = g$, вроде бы, вытекает, что функция в данной точке не может иметь два разных предела. Но так ли? Конечно, у нас в этом случае есть два неравенства: $f \leq g$ и $g \leq f$. Однако применить теорему мы сможем лишь в том случае, если для каждого из этих неравенств сколь угодно близко от точки x_* найдутся отличные от нее точки из области определения наших функций, в которых это неравенство выполняется. А есть ли они? К нашему великому счастью — есть! Но лишь потому, что, говоря о пределе функции в точке x_* , мы заранее предупреждаем: точка x_* — предельная для множества, где задана функция. И пусть наши тонкие наблюдения у кого-то вызовут недоумение, у кого-то — снисходительную улыбку, но мы со всей ответственностью заявляем, что без указанных оговорок теорема об единственности предела неверна...

Т е о р е м а. Пусть функции f, g и h определены на общем для них множестве и связаны неравенствами $f \leq g \leq h$. Если в некоторой точке функции f и h имеют равные пределы, в той же точке и функция g имеет такой же предел.

Доказательство. Пусть x_* — предельная точка множества X , где заданы все наши функции, а λ — общий предел «крайних» функций f и g в этой точке. Если $\lambda' < \lambda$, то для всех точек $x \in X$, отличных от точки x_* и достаточно близких к ней, $f(x) > \lambda'$, а тогда и $g(x) > \lambda'$. Если же $\lambda < \lambda''$, то, опять же, для всех точек $x \in X$, отличных от точки x_* и достаточно близких к ней, $h(x) < \lambda''$, так что и $g(x) < \lambda''$. Итак, мы видим, что $g(x) \rightarrow \lambda$ при $x \rightarrow x_*$. Теорема доказана.

Эта замечательная теорема бывает полезна чаще, чем это может показаться — в силу ее скромности обычно просто не замечают, что опираются на нее. Например, учитывая непрерывность косинуса, которая проявляется, в частности, в том, что $\cos x \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$, и геометрически очевидные неравенства

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \text{где } 0 < |x| < \frac{\pi}{2},$$

мы приходим к хорошо известному нам соотношению

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Мы благополучно пришли бы к нему и в том случае, если бы даже не подозревали, что есть такая теорема...

Вопрос 13. *Критерий Коши существования конечного предела функции одной переменной. Для ответа выберите один из пяти обсуждавшихся в курсе вариантов поведения аргумента функции.*

Пусть X — подмножество числовой прямой, а x_* — его предельная точка, обычная или бесконечно удаленная — все равно. Будем говорить, что функция f , определенная на множестве X , удовлетворяет *условию Коши в точке x_** , если $f(x'') - f(x') \rightarrow 0$, когда обе точки x' и x'' , «независимо одна от другой», стремятся к x_* . Это значит, что, каким бы ни было число $\varepsilon > 0$, для всех точек x' и x'' , отличных от точки x_* и «достаточно близких» к ней, справедливо неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Критерий Коши, который мы сейчас сформулируем и легко докажем, замечателен тем, что позволяет порой установить существование конечного предела функции в той, казалось бы, безнадежной ситуации, когда мы не знаем этого предела заранее, а быть может, никогда и не назовем его...

Т е о р е м а. *Функция имеет конечный предел в данной точке тогда и только тогда, когда в этой точке она удовлетворяет условию Коши.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. В самом деле, пусть $f(x)$ стремится к числу l , когда x стремится к x_* . Если $\varepsilon > 0$, то $|f(x) - l| < \varepsilon/2$, если только точка x отлична от точки x_* и достаточно близка к ней. В таком случае, если точки x' и x'' близки к точке x_* в той же степени и отличны от нее, справедливы неравенства

$$|f(x'') - f(x')| \leq |f(x'') - l| + |f(x') - l| < \varepsilon.$$

Предположим теперь, что функция f удовлетворяет условию Коши в точке x_* . Тогда, как легко понять, этому условию удовлетворяет и любая последовательность $f(x_n)$, где $x_n \neq x_*$ и $x_n \rightarrow x_*$. Таким образом, $f(x_n)$ имеет конечный предел, и нам, чтобы сослаться на Гейне, остается лишь заметить, что он не зависит от выбора x_n . Действительно, если $f(x'_n) \rightarrow l'$, а $f(x''_n) \rightarrow l''$, где $l' \neq l''$, а точки x'_n и x''_n отличны от x_* и стремятся к x_* , то последовательность $f(x'_1), f(x''_1), f(x'_2), f(x''_2), \dots$, очевидно, не имеет предела, хотя он должен быть, поскольку точки $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots$ тоже отличны от x_* и тоже стремятся к x_* . Теорема доказана.

Как и в случае последовательностей, при исследовании функций критерий Коши оказывает в основном «теоретическую» помощь, но нередко бывает полезным и в конкретных вопросах. Рассмотрим, например, легендарный интеграл Дирихле, который играет важную роль в том исключительно красивом и богатом приложениями разделе анализа, который связывают с именем Фурье:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Его сходимость обычно доказывают, опираясь на признак того же Дирихле. Признак довольно тонкий, но сейчас мы о другом. Сейчас мы о критерии Коши, согласно которому нам достаточно показать, что интеграл

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx,$$

где $0 < a < b$, стремится к нулю, когда a , а тогда и b , стремятся к бесконечности. В самом деле, если $f(x)$ — первообразная подынтегральной функции на полупрямой $x > 0$, то сходимость интеграла, у которого «особенность» только на бесконечности, равносильна существованию конечного предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, а для этого, согласно Коши, нужно, чтобы при больших a и b была мала разность $f(b) - f(a)$, о чем и было сказано выше. Итак, «посчитаем» последний интеграл, равный этой разности, по частям:

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = - \int_a^b \frac{d \cos x}{x} = - \frac{\cos x}{x} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Первое слагаемое справа, как легко видеть, по абсолютной величине не больше суммы $a^{-1} + b^{-1}$, второе — разности $a^{-1} - b^{-1}$, так что

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{a}.$$

Хороший жанр — «ответы на вопросы к экзамену»! Здесь не надо сдерживать себя логикой предмета в целом. Можно, например, иллюстрируя вопрос, обратиться к примерам из более далеких разделов. Ведь читатель уже научился чему-нибудь да как-нибудь, а теперь, когда с нетерпением и радостным трепетом ждет экзамена, может обнаружить, что разные части предмета, оказывается, связаны между собой. Ведь у него сейчас все перед глазами, все вместе... Нет, что ни говори, а экзамен — это праздник!

Вопрос 14. *Монотонные функции — определения, примеры. Теорема об односторонних пределах монотонной функции. Рассмотрите оба типа монотонности.*

Что бы мы ни говорили о функциях вообще, самый широкий взгляд на которые часто связывают с именем Лобачевского, но самые любимые для миллионов функции — те, что «задаются формулами» и давно получили статус элементарных. На самом деле не такие уж они и «элементарные», а кроме того, совсем не случайно они выделены историей, но сейчас речь не о том. Посмотрите, скажем, на показательные или логарифмические функции — они монотонны. А вот

синус и косинус — нет. Но даже тогда, когда мы говорим «нет», мы подчеркиваем, насколько важна для нас монотонность. Мы говорим: у синуса и косинуса участки возрастания и убывания чередуются. Словом, эти функции тоже монотонны, но на определенных участках. И что же нас прежде всего интересует, кроме знака функции, когда мы смотрим на ее график? Ответ очевиден — нам интересно, где функция растет, а где — убывает...

Рассмотрим функцию f вещественного аргумента и произвольную пару чисел x' и x'' из области ее определения, связанных неравенством $x' < x''$. Если при этом каждый раз $f(x') \leq f(x'')$, функцию называют *неубывающей*, а если $f(x') \geq f(x'')$, говорят, что функция *невозрастает*. В обоих случаях функцию называют *монотонной*.

Приятная черта монотонных функций состоит в том, что они всегда имеют односторонние пределы всюду, где о них только можно говорить. Точнее говоря, имеет место следующее утверждение, обобщающее уже знакомую нам теорему Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности.

Т е о р е м а. В каждой точке, где область определения монотонной функции сгущается слева или справа, функция имеет соответствующий односторонний предел. Если эта область неограничена с той или иной стороны, наша функция имеет предел и на соответствующей бесконечности.

Доказательство. Логика рассуждений здесь, фактически, та же, что и в случае монотонных последовательностей. Пусть, для определенности, неубывающая функция f определена на множестве X , которое сгущается в точке a слева. Посчитаем верхнюю грань λ значений функции во всех точках из X , расположенных слева от a . Эта грань может быть конечной или равной $+\infty$. В любом случае $f(x) \leq \lambda$ для всех только что указанных точек x . С другой стороны, если $\lambda' < \lambda$, то λ' уже не является верхней границей для всех интересующих нас значений функции, поскольку наименьшая из этих границ есть λ . Это значит, что для некоторой точки $x' \in X$, лежащей слева от a , справедливо неравенство $f(x') > \lambda'$. Но тогда и $f(x) \geq f(x') > \lambda'$ для всех точек $x \in X$, лежащих в интервале $x' < x < a$. Иными словами, $f(x) \rightarrow \lambda$ при $x \rightarrow a - 0$.

Обсудим, для пущей убедительности, еще одну ситуацию, а именно: пусть f означает теперь невозрастающую функцию, определен-

ную на множестве X , не ограниченном сверху, а λ будет точной нижней границей всех ее значений. Как мы сейчас увидим, эта граница, которая может быть конечной или равной $-\infty$, служит пределом для $f(x)$, когда $x \rightarrow +\infty$. Прежде всего заметим, что $f(x) \geq \lambda$ для всех $x \in X$. Если же $\lambda' > \lambda$, то λ' не может служить нижней границей для всех значений нашей функции, поскольку наибольшая из них — это λ . Поэтому найдется такая точка $x' \in X$, что $f(x') < \lambda'$. Но тогда и $f(x) \leq f(x') < \lambda'$ всех точек $x \in X$, лежащих правее x' . Таким образом, $f(x) \rightarrow \lambda$ при $x \rightarrow a - 0$. Точно так же могут быть проанализованы и остальные варианты. Теорема доказана.

Имеет смысл систематизировать результаты проведенного нами исследования. Если бы мы рассмотрели все возможности, то, разумеется, обнаружили бы, что в каждой предельной точке x_* области определения монотонной функции f роль ее односторонних пределов исполняют те или иные точные границы соответствующих ее значений, а именно:

если функция неубывает, то

$$\lim_{x \rightarrow x_* - 0} f(x) = \sup_{x < x_*} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_* + 0} f(x) = \inf_{x > x_*} f(x);$$

если же она невозрастает, то

$$\lim_{x \rightarrow x_* - 0} f(x) = \inf_{x < x_*} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_* + 0} f(x) = \sup_{x > x_*} f(x).$$

Здесь, конечно, имеется в виду, что в каждом случае x_* является предельной точкой для той части области определения функции f , что лежит с интересующей нас стороны. На эти части и распространяются точные границы. Наконец, подчеркнем, что в случае $x_* = -\infty$ или $x_* = +\infty$, когда символы $x_* + 0$ и $x_* - 0$ выглядят, прямо скажем, довольно трогательно, они соответственно означают просто $-\infty$ и $+\infty$, так что нижняя и верхняя грани считаются по всей области определения нашей функции.

Вопрос «особый». *Непрерывные функции — определения Коши и Гейне, связь между понятиями непрерывности и предела, непрерывность и неравенства, непрерывность и арифметические операции, суперпозиция непрерывных функций.*

Вопрос назван «особым» по двум причинам. Одна из них серьезная: вопрос принципиально важен. Другая — смешная: так получилось, что вопроса нет в программе экзамена. Что поделаешь? Нет, так нет! Значит, его не будет ни в одном билете. Но знать все это крайне необходимо! Заканчивает сие лирическое отступление убедительная просьба автора этих горьких строк — прочтите их!

Функцию f , определенную на подмножестве X числовой прямой, называют *непрерывной* в точке a , принадлежащей этому множеству, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in X$, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, соответствующие им значения функции подчиняются неравенству $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. По-существу эта логическая конструкция нам уже хорошо известна. В нашем случае она выражает в строгой форме ту ситуацию, когда вблизи данной точки все значения функции близки к ее значению в самой этой точке. И здесь читатель мог бы в очередной раз выразить свое искреннее восхищение поистине поразительными возможностями слова и логики. Не удивительно ли, когда наши зыбкие, туманные представления о таких, казалось бы, чисто интуитивных вещах, как непрерывность, обретают ясную и точную форму благодаря одной лишь фразе, лаконичной и безупречной?

Точка, принадлежащая множеству, но не являющаяся для него предельной, называется его *изолированной точкой*. Ее можно окружить интервалом, в котором она будет единственным представителем этого множества. Каждая функция непрерывна в любой изолированной точке области ее определения по тривиальным причинам, так что в этом случае обсуждаемое нами условие не слишком содержательно. Если же множество, где задана функция f , не только содержит точку a , но и сгущается в ней, то непрерывность функции в такой точке означает, что $f(x) \rightarrow f(a)$ при $x \rightarrow a$. Разумеется, то же самое условие можно выразить в иных терминах: $f(x_n) \rightarrow f(a)$, какую бы ни взять сходящуюся к a последовательность точек x_n из области определения функции f . Это доказывается так же, как аналогичное утверждение о пределах, только еще проще.

Чтобы лучше понять смысл того или иного условия, полезно представить себе ситуации, где оно не выполняется. Точку, в которой функция определена, но не удовлетворяет условию непрерывности, называют ее *точкой разрыва*. Этот термин традиционно применяют и к тем точкам, которые служат предельными для области определения изучаемой функции, но не принадлежат ей. В этом случае нельзя посчитать значение функции, но можно поставить вопрос об ее пределе. Различают несколько вариантов поведения функции около точки, где у нее случается разрыв. Бывает, например, что функция имеет в точке конечный предел, и тогда причина ее разрыва может заключаться лишь в том, что она или еще не определена в этой точке, или уже определена, но так неудачно, что ее предел не совпадает с ее значением. Такую причину легко устранить, приписывая функции новое значение в рассматриваемой точке, равное ее пределу. Естественно в такой ситуации говорить об *устранимой точке разрыва*. Точку, где функция имеет конечные односторонние пределы слева и справа, но эти пределы различны, называют ее *точкой разрыва первого рода*. Такой разрыв уже не устранить ничем, разве что сужением области определения. Наконец, если в интересующей нас точке хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или вовсе не существует, о функции говорят, что в этой точке она терпит *разрыв второго рода*. Этих терминов достаточно, чтобы квалифицировать любую точку разрыва.

Очень важно знать, какие операции можно применять к непрерывным функциям, в результате которых получается снова непрерывная функция. Для облегчения формулировок мы будем говорить о функциях, которые называют просто *непрерывными*, имея в виду, что они непрерывны в каждой точке того множества, где они заданы или рассматриваются в данном контексте.

Т е о р е м а. *Вместе с любыми двумя функциями, непрерывными на общей области их определения, непрерывны также их сумма, разность, произведение и отношение, если только функция, попавшая в знаменатель нигде не обращается в нуль. Композиция непрерывных функций непрерывна всюду, где она определена.*

Доказательство. Четыре утверждения теоремы о четырех арифметических действиях непосредственно вытекают из «секвенциального» определения непрерывности и хорошо известных нам свойств предельного перехода. Например, если функции f и g непрерывны в

точке x_0 , мы возьмем произвольную последовательность x_n из совместной их области определения и заметим, что если $x_n \rightarrow x_0$, то $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ и $g(x_n) \rightarrow g(x_0)$, откуда

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \rightarrow f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0),$$

а это значит, что сумма $f + g$ непрерывна в точке x_0 . То же касается и остальных арифметических операций.

Пусть теперь нам даны функция φ , непрерывная в точке t_0 , и функция f , которая определена и непрерывна в точке $\varphi(t_0)$. В области определения «сложной» функции $f \circ \varphi$ выберем какую угодно последовательность t_n и предположим, что она стремится к t_0 . Тогда $\varphi(t_n) \rightarrow \varphi(t_0)$, а вслед за этим, и

$$(f \circ \varphi)(t_n) = f(\varphi(t_n)) \rightarrow f(\varphi(t_0)) = (f \circ \varphi)(t_0).$$

Таким образом, суперпозиция $f \circ \varphi$ непрерывных функций φ и f также представляет собой непрерывную функцию. Теорема доказана.

Если непрерывная функция взаимно однозначна, естественно возникает вопрос о непрерывности обратной функции. Мы обсудим его чуть позже, но уже сейчас можно подумать о «контрпримерах»...

Вопрос 15. *Теорема Больцано — Коши о промежуточном значении непрерывной функции одной переменной.*

Наиболее характерная черта непрерывной переменной величины заключается в том, что она, переходя от одного значения к другому, не может пропустить ни одного промежуточного значения. Теорема *Больцано — Коши* представляет это утверждение в его простейшей и строгой форме.

Т е о р е м а. *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в каждой точке отрезка $a \leq x \leq b$, то любое число, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$, принадлежит области значений этой функции.*

Такое ощущение, будто теорема ждет, что ее прокомментируют. Мы только что согласились с тем, что наши интуитивные представления о непрерывности допускают, вроде бы, адекватное выражение конечным и очень небольшим набором слов. Но строгому определению непрерывности, которому мы доверились, предстоит еще выдер-

жать ряд экзаменов, убеждая нас каждый раз в том, что любые свойства функций, непрерывных в нашем изначальном понимании, действительно являются его непреложными логическими следствиями. Например, мы хотели бы, чтобы у такой функции, которая задана на отрезке и считается непрерывной в каждой его точке, ее график, если он начинается «ниже» некоторой «горизонтальной» прямой и заканчивается «выше» нее, где-то пересекал бы эту прямую. Теорема Больцано — Коши утверждает, что этим свойством и в самом деле обладают функции, которые выше были *названы* непрерывными. И это важно, ибо есть в математике немало такого, что уже недоступно интуиции или вовсе противоречит ей. В таких случаях у нас остается лишь одна возможность — довериться строгому определению и железной логике. Вспомните Пеано и его непрерывную линию, которая посещает все точки квадрата!

Доказательство. Предположим, для определенности, что $f(a) \leq f(b)$, и пусть $f(a) \leq y \leq f(b)$. Если исходный отрезок разделить на два равных отрезка вдвое меньшей длины, то в граничных точках a_1 и b_1 по крайней мере одного из них будут выполнены аналогичные неравенства $f(a_1) \leq y \leq f(b_1)$. Точно так же разделим теперь новый отрезок, затем следующий, и так до бесконечности. В результате у нас появится последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, для каждого из которых $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$. Как мы знаем, существует общая точка x всех наших отрезков, к которой стремятся одновременно их левые и правые концы a_n и b_n , а значит, $f(a_n) \rightarrow f(x)$ и $f(b_n) \rightarrow f(x)$. Переходя к пределу в предыдущих неравенствах, мы получаем, что $f(x) \leq y \leq f(x)$, или $f(x) = y$. Теорема доказана.

Опираясь на эту теорему, легко выяснить, как устроена область значений непрерывной функции, заданной на произвольном числовом промежутке. Отметим прежде один геометрически очевидный факт, отражающий еще в одном аспекте полноту числовой прямой. Множество на прямой назовем *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и весь заключенный между ними отрезок. Например, все промежутки выпуклы.

Т е о р е м а. *На числовой прямой нет других выпуклых множеств, кроме промежутков.*

Всегда приятно поговорить о пустом множестве. Да и вообще — о пустом... По-видимому, в этом что-то есть... В нашем случае такого

разговора, хотя и недолгого, не избежать, раз уж мы хотим, чтобы наше утверждение не имело исключений. Пустое подмножество числовой прямой в полной мере удовлетворяет условию, указанному в определении выпуклого множества. Согласимся также, что его вполне можно считать *интервалом* с одинаковыми левым и правым концами — чем не промежуток? Итак, пошутили, а теперь

Доказательство. Пусть α и β означают точные границы *непустого* выпуклого множества I , нижнюю и верхнюю. Конечные они или нет, в любом случае $\alpha \leq \beta$, а все точки $x \in I$ удовлетворяют неравенствам $\alpha \leq x \leq \beta$, что можно выразить включением $I \subset [\alpha, \beta]$. Далее, какую бы ни взять точку x из интервала $\alpha < x < \beta$, она, очевидно, не может быть ни нижней, ни верхней границей для множества I . Поэтому в множестве I найдутся такие две точки x_0 и x_1 , что $x_0 < x < x_1$. Но тогда, в соответствии с определением выпуклого множества, $x \in I$, и мы получаем второе включение $(\alpha, \beta) \subset I$. Итак, множество I либо совпадает с интервалом (α, β) , либо содержит, кроме всех его точек, какой-нибудь один из его концов или оба. В любом из четырех вариантов мы получаем один из промежутков с концами α и β . Теорема доказана.

Т е о р е м а. *Если функция определена и непрерывна на непустом промежутке, то и все ее значения заполняют собой целый промежуток, концами которого служат точные границы области значений функции.*

Доказательство. Из теоремы Больцано — Коши вытекает, что непрерывный образ промежутка — выпуклое множество, а значит, как мы только что видели, — промежуток. Нам остается заметить, что концы «настоящего» промежутка всегда служат ему точными границами. Теорема доказана.

Располагая дополнительной информацией о функции и области ее определения, как мы увидим — но не здесь и не сейчас, — иногда можно уточнить описание области ее значений.

Вопрос 16. *Признак непрерывности монотонной функции и теорема об обратной функции.*

Поведение функции около точки ее разрыва может быть очень сложным. Но если функция монотонна, картина получается предель-

но простой. Как мы уже знаем, такая функция в каждой точке, где область ее определения сгущается с какой-либо стороны, имеет соответствующий односторонний предел. Если же эта область сгущается в данной точке с обеих сторон, то пределы слева и справа, очевидно, конечны, и функция может иметь здесь разрыв либо первого рода, либо вовсе устранимый.

Отметим одну интересную особенность области значений монотонной функции, испытывающей разрыв в некоторой точке, где она задана. Рассмотрим, например, неубывающую функцию f , определенную на множестве X , которое содержит точку x_0 и сгущается в ней с правой стороны. Поскольку $f(x) \geq f(x_0)$, когда $x \in X$ и $x > x_0$, то правосторонний предел $f(x_0 + 0)$ нашей функции в точке x_0 может не совпадать с ее значением $f(x_0)$ в самой точке, только в том случае, если $f(x_0 + 0) > f(x_0)$. Если действительно так и случилось, то область значений функции «разрывается» на две непустые части, разделенные одна от другой интервалом от $f(x_0)$ до $f(x_0 + 0)$, в котором нет ни одного значения нашей функции. В самом деле, какую бы точку $x \in X$ мы ни взяли, возможны только два варианта: если $x \leq x_0$, то $f(x) \leq f(x_0)$, а если $x > x_0$, то, очевидно, $f(x) \geq f(x_0 + 0)$. При этом, что важно подчеркнуть, оба варианта реализуются. В самом деле, множество X сгущается в точке x_0 справа, так что в нем есть точка $x_1 > x_0$. С другой стороны, условию $x \leq x_0$ удовлетворяет хотя бы точка $x = x_0$. Итак, мы имеем две точки x_0 и x_1 множества X , но не все точки отрезка $[x_0, x_1]$ лежат в X . Это и значит, что X «терпит разрыв», а точнее — не является промежутком.

Т е о р е м а. Если областью значений для монотонной функции служит промежуток, эта функция непрерывна.

Доказательство. На самом-то деле доказывать здесь уже нечего. Нужно только подвести итоги. Как мы знаем, в изолированной точке области определения функция не может иметь разрыва. Что же касается остальных, а именно — предельных, точек, то нарушение непрерывности функции в какой-либо из них означает, что хотя бы один из односторонних пределов функции в такой точке отличен от ее значения в этой точке. Если же речь идет о монотонной функции, то ее разрыв приводит к разрыву области ее значений, которая в этом случае никак не может быть промежутком, вопреки условию теоремы. Мы видели это выше, изучив «правосторонний» разрыв неубывающей функции, но совершенно ясно, что к тому же выво-

ду мы пришли бы, рассматривая левосторонние точки сгущения или невозрастающие функции. Теорема доказана.

Функцию вещественной переменной называют *возрастающей*, если большему значению аргумента отвечает большее значение функции. Если же значения функции уменьшаются при увеличении аргумента, ее называют *убывающей*. В любом из этих двух случаев функцию считают *строго монотонной*. Ясно, что такая функция взаимно однозначна, а значит, имеет обратную, которая тоже строго монотонна, причем в том же смысле, что и исходная.

Т е о р е м а. *Если функция определена и строго монотонна на некотором промежутке, обратная к ней функция непрерывна.*

Доказательство. Достаточно сослаться на предыдущую теорему, заметив лишь, что область определения функции служит одновременно и областью значений для обратной к ней. Теорема доказана.

Т е о р е м а. *Если функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и строго возрастает на интервале $a < x < b$, то она имеет обратную функцию $x = f^{-1}(y)$, которая определена, непрерывна и строго возрастает на интервале $\alpha < y < \beta$, где*

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad \text{и} \quad \beta = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x).$$

Если же функция может быть доопределена с сохранением непрерывности в какой-нибудь из крайних точек a или b исходного интервала, ее значение в этой точке, равное α или β , добавляется к области определения обратной функции, которая и на более широком промежутке остается непрерывной и строго монотонной. Убывающие функции обладают такими же свойствами, только левые и правые концы промежутков они меняют местами.

Доказательство. Область значений непрерывной функции, как нам известно, представляет собой промежуток, а его концами служат точные границы всех значений функции, совпадающие, если функция монотонна, с соответствующими односторонними ее пределами. Если функция строго монотонна, а областью ее определения служит интервал, функция не может достигать на нем ни минимума, ни максимума, и областью ее значений тоже оказывается интервал. Непрерывность обратной функции гарантируется предыдущей теоремой. Остальные утверждения очевидны. Теорема доказана.

Разумеется, функция может быть взаимно однозначной не только в том случае, когда она строго монотонна. Однако это возможно лишь при условии, что либо сама функция, либо область ее определения где-нибудь терпят разрыв.

Т е о р е м а. Непрерывная на промежутке функция взаимно однозначна тогда и только тогда, когда она строго монотонна.

К сожалению, мы не можем сейчас задерживаться на обсуждении этой замечательной теоремы, а если честно, то и не обязаны, поскольку даже ее формулировки, а тем более — ее доказательства, нет в программе экзамена.

Вопрос 17. *Теорема Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях непрерывной на отрезке функции.*

Так называют следующую классическую теорему, одну из тех хрестоматийных теорем анализа, которые были осознаны и строго доказаны в счастливый период создания прочного фундамента этой великой науки...

Т е о р е м а. Если функция определена и непрерывна в каждой точке числового отрезка, то среди всех ее значений есть наименьшее и наибольшее. В частности, любая такая функция ограничена.

Доказательство. Пусть u означает точную нижнюю границу всех значений функции $f(x)$, которые она имеет на отрезке $a \leq x \leq b$. Пока мы не знаем, конечна ли эта грань, но в любом случае она не может быть равной $+\infty$, а значит, можно найти такую последовательность чисел u_n , что $u_n > u$ и $u_n \rightarrow u$. Ни одно из чисел u_n не может быть нижней границей для нашей функции, поскольку наибольшая из них есть u . Поэтому для каждого n мы можем найти между a и b такую точку x_n , что $f(x_n) < u_n$. С другой стороны, всегда $f(x_n) \geq u$. Вспоминая о зажатых последовательностях, мы заключаем, что $f(x_n) \rightarrow u$. Что касается самих точек x_n , то их поведение непредсказуемо. Можно утверждать только одно — все они расположены между a и b . Но этого вполне достаточно, чтобы вспомнить о теореме Больцано — Вейерштрасса. Если теперь, опираясь на нее, из точек x_n выбрать *сходящуюся* подпоследовательность x_{n_k} , то можно заметить, что ее предел x_* останется в том же отрезке $a \leq x_* \leq b$, а тогда, благодаря непрерывности функции, $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_*)$. Но мы

знаем, что $f(x_{n_k}) \rightarrow u$. Эти два вывода можно совместить только одним способом — признать, что $f(x_*) = u$. Таким образом, нижняя грань всех значений функции оказалась одним из них, так что в точке x_* функция f имеет минимум. Аналогично устанавливается существование максимума. Теорема доказана.

Вспоминая теорему Больцано — Коши, согласно которой непрерывный образ промежутка числовой прямой тоже представляет собой промежуток, мы можем теперь дополнить ее, заметив, что непрерывный образ отрезка есть отрезок. Теорема Вейерштрасса, о которой мы здесь говорили, имеет исключительно важное значение для анализа. Достаточно сказать, что, в конечном счете, именно на нее опирается доказательство замечательной теоремы Лагранжа о конечном приращении, играющей центральную роль в построении дифференциального исчисления.

Вопрос 18. *Равномерная непрерывность функции — определение для функций одной переменной, примеры непрерывных, но не равномерно непрерывных функций. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.*

Функцию f , определенную на множестве X , называют *равномерно непрерывной* на нем, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, какие бы ни выбрать в множестве X точки x' и x'' , лишь бы они удовлетворяли неравенству $|x' - x''| < \delta$, или, говоря геометрическим языком, находились одна от другой на расстоянии меньшем δ .

Это очень сильное условие. Из него вытекает не только непрерывность функции в каждой точке рассматриваемого множества, но и существование у нее конечного предела в любой точке прямой, где это множество сгущается. Впрочем, если множество ограничено, то совокупность указанных двух условий уже обеспечивает равномерную непрерывность. В простейшем и наиболее важном случае это утверждение называют *теоремой Кантора*.

Т е о р е м а. *Функция, непрерывная в каждой точке отрезка, равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $a \leq x \leq b$, но не равномерно. Тогда найдутся число $\varepsilon_0 > 0$ и

пара последовательностей x'_n и x''_n в нашем отрезке, для которых

$$|x'_n - x''_n| < 1/n \quad \text{и} \quad |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Отрезок здесь важен тем, что, например, из последовательности x'_n можно выбрать подпоследовательность x_{n_k} , сходящуюся к одной из *его же* точек x . Но в таком случае, очевидно, и точки x''_{n_k} будут стремиться к x . Следовательно, значения $f(x'_{n_k})$ и $f(x''_{n_k})$ непрерывной функции f должны будут сходиться к общему пределу $f(x)$, а их разность — стремиться к нулю, что невозможно, поскольку она остается по модулю не меньшей ε_0 . Теорема доказана.

Хорошо видно, насколько важным в наших рассуждениях было предположение о том, что областью определения изучаемой функции служит не какой-нибудь промежуток, но именно отрезок. Очевидно, что дело не в рассуждениях, но в том, без этого условия не обойтись в том смысле, что его нельзя просто отбросить, не заменив ничем другим. Как мы уже отмечали выше, из равномерной непрерывности функции на том или ином множестве вытекает не только ее непрерывность, но и существование конечного предела в каждой точке, где о нем можно говорить. Это прямо следует из критерия Коши. Поэтому, например логарифм или синус обратного аргумента, хотя и непрерывны всюду, где определены, не будут равномерно непрерывными ни на каком множестве, которое сгущается в нуле: в первом случае предел в нуле бесконечен, во втором — его просто нет. Впрочем, это ясно и непосредственно — если мы фиксируем $\varepsilon > 0$ и затем для точки x будем подыскивать подходящее $\delta > 0$, то наши старания, разумеется, увенчаются успехом, поскольку функции, все-же, непрерывны, но мы непременно заметим, что нашему δ приходится быть все меньше и меньше, когда точка x приближается к нулю. Выбрать δ настолько маленьким, чтобы оно, при данном ε , сгодились сразу для всех точек x , невозможно. Словом, одна лишь непрерывность функции в каждой точке данного множества еще не гарантирует ей равномерной непрерывности на этом множестве. Тем более отрадно в этом контексте звучит теорема Кантора.

Нет ничего страшного, если равномерной непрерывности нет. Но если есть, это может оказаться полезным. Например, опираясь на теорему Кантора, нетрудно установить очень важный факт — любая функция, определенная и непрерывная на отрезке числовой прямой, интегрируема на нем в смысле Римана.