Студентам ФФ НГУ
и их преподавателям
на добрую память

Задание по теме «Системы дифференцируемых функций» Решения семи последних задач

В. В. Иванов

Задание по только что указанной теме курса математического анализа, читаемого мною на физическом факультете НГУ, содержит ряд «своеобразных» задач, решение которых позволяет студентам не только укрепиться в навыках дифференцирования, но и познакомиться с интересными понятиями и конструкциями, имеющими общематематическое значение, а кроме того, играющими важную роль в могучем арсенале классической и современной физики.

Наш замысел был в том, чтобы представить далеко не тривиальный материал в виде специальным образом упорядоченной цепочки довольно простых упражнений, вполне доступных нашим студентам уже в начале второго семестра — им достаточно уметь обращаться с частными производными, быть знакомыми с якобианами и диффеоморфизмами, а также знать теорему об обратном отображении. С другой стороны, при всей своей привлекательности, эти упражнения не относятся к числу «формально–обязательных». Поэтому мы сочли возможным и целесообразным снабдить их подробными решениями, полагая, что тем самым, никого не лишая радости самостоятельных открытий, хоть немного облегчим жизнь студентам и, быть может, их преподавателям... Вот перечень обсуждаемых вопросов:

1. *Линейные дифференциальные операторы*
2. *Коммутатор дифференциальных операторов*
3. *Скобка Пуассона векторных полей*
4. *Скобка Пуассона гладких функций*
5. *Преобразование Лежандра*
6. *Уравнения Лагранжа и Гамильтона*
7. *Канонические преобразования*

Вряд ли стоит подчеркивать, что в наши намерения ни в какой степени не входит *дублирование* физических курсов. Хотя и «скрепя сердце», мы не приводим здесь соответствующих интерпретаций и примеров — это в свое время сделают физики. Но мы хорошо знаем, насколько приятно бывает студенту, приступившему к изучению новой для него дисциплины, вдруг вспомнить, что где–то когда–то что–то похожее он уже встречал и был способен это понять...

1. Линейные дифференциальные операторы

Гладкое *векторное поле* A в области *арифметического* пространства размерности n мы определяем как систему гладких в этой области функций $A_1, \ldots, A_n$. С каждым таким полем связан *дифференциальный оператор первого порядка* L_A, действующий на любую гладкую в рассматриваемой области функцию u по правилу

$$L_A u = A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial u}{\partial x_n}.$$

Чтобы не отвлекаться на детали, несущественные для обсуждаемых нами вопросов, условимся, говоря о *гладкости* той или иной функции, подразумевать, что она имеет непрерывные частные производные всех порядков по всевозможным наборам переменных.

Предложение 1. *Оператор* L_A *линеен: если* $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, *то*

$$L_A u = \lambda_1 \, L_A \, u_1 + \lambda_2 \, L_A \, u_2.$$

Доказательство. Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_i}$$

для каждого i, то

$$L_A \; u = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial u_2}{\partial x_i} = \lambda_1 L_A \; u_1 + \lambda_2 L_A \; u_2.$$

Предложение доказано.

Предложение 2. *Оператор* L_A *действует на произведение функций по правилу Лейбница:*

$$L_A \, (uv) = u \, L_A \, v + v \, L_A \, u.$$

Доказательство. Поскольку

$$\frac{\partial (uv)}{\partial x_i} = u \, \frac{\partial v}{\partial x_i} + v \, \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

для всех i, то

$$L_A \, (uv) = \sum_{i=1}^{n} A_i \, \left(u \, \frac{\partial v}{\partial x_i} + v \, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = u \, L_A \, v + v \, L_A \, u.$$

Предложение доказано.

Предложение 3. *Описанное выше соответствие между векторными полями и дифференциальными операторами взаимно однозначно, а именно: если два поля A и B таковы, что $L_A = L_B$, то $A = B$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $u(x_1, \ldots, x_n) = x_k$. Замечая, что

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k,$$

мы приходим к равенству координат A_k и B_k векторных полей A и B :

$$A_k = L_A u = L_B u = B_k.$$

Поскольку это верно для всех k, то $A = B$. Предложение доказано.

2. Коммутатор дифференциальных операторов

Легко убедиться на конкретных примерах, что операторы L_A и L_B, отвечающие разным полям A и B, вообще говоря, не коммутируют: произведение $L_B L_A$, как правило, не равно произведению $L_A L_B$.

Пример. На плоскости с координатами (x, y) рассмотрим два поля $A = (y, 0)$ и $B = (0, 1)$. Отвечающие им дифференциальные операторы действуют на каждую гладкую функцию $u = u(x, y)$ по формулам

$$L_A = y\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{и} \quad L_B = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Отсюда

$$L_B(L_A u) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},$$

С другой стороны,

$$L_A(L_B u) = y\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = y\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}.$$

Вторые смешанные производные в последних двух выражениях, как мы знаем, равны. Следовательно, разность

$$L_B(L_A u) - L_A(L_B u) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

представляет собой значение на функции u оператора дифференцирования по переменной x, соответствующего полю $(1, 0)$.

Разность $L_B L_A - L_A L_B$ называют *коммутатором* операторов L_A и L_B. Порядок каждого из дифференциальных операторов $L_B L_A$ и $L_A L_B$ за редкими исключениями (кстати, какими именно?) в точности равен двум. На наш взгляд, достойно искреннего удивления то обстоятельство, что их разность, как и в рассмотренном выше конкретном примере, всегда представляет собой линейный дифференциальный оператор *первого* порядка, т. е. имеет вид L_K, где K — некоторое векторное поле. Как уже отмечалось, этим поле K определяется однозначно.

Предложение. *Для любых полей $A = (A_1, \ldots, A_n)$ и $B = (B_1, \ldots, B_n)$ существует единственное поле $K = (K_1, \ldots, K_n)$, для которого*

$$L_B L_A - L_A L_B = L_K,$$

а его компоненты выражаются через координаты полей A и B по формулам:

$$K_j \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left(B_i \, \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \;-\; A_i \, \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right).$$

Доказательство. Вычислим значение оператора L_B на функции $L_A u$:

$$L_B\,(L_A u) = \sum_{i=1}^{n} B_i \, \frac{\partial}{\partial x_i} (L_A u) = \sum_{i=1}^{n} B_i \, \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} A_j \, \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + A_j \, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} \right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} B_i \, \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \;+\; \sum_{i,j=1}^{n} B_i \, A_j \, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j}.$$

Меняя местами A и B, мы приходим к аналогичной формуле для значения оператора L_A на функции $L_B u$:

$$L_A\,(L_B u) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \, \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \;+\; \sum_{i,j=1}^{n} A_i \, B_j \, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j}.$$

Благодаря симметричности смешанных производных последнюю сумму можно представить в виде

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_i \, B_j \, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} A_j \, B_i \, \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \, \partial x_i} = \sum_{i,j=1}^{n} B_i \, A_j \, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j},$$

так что она совпадает со второй суммой последнего выражения в предыдущей цепочке равенств. Отсюда и вытекает требуемый вывод:

$$L_B L_A u \;-\; L_A L_B u = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(B_i \, \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \;-\; A_i \, \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right) \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} K_j \, \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

где функции K_j определяются указанными выше соотношениями. Предложение доказано.

3. Скобка Пуассона векторных полей

Векторное поле K, для которого $L_K = L_B L_A - L_A L_B$, называют *коммутатором,* или *скобкой Пуассона,* полей A и B, обозначая его символом $[A, B]$.

Предложение. *Как бинарная операция, скобка Пуассона линейна по каждому «сомножителю», антикоммутативна и удовлетворяет тождеству Якоби:*

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$$

Доказательство. Как мы уже знаем, соответствие между векторными полями и обсуждаемыми здесь дифференциальными операторами взаимно однозначно. Полезно также иметь в виду, что оно и *линейно.* А именно, если $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, то, как нетрудно видеть, $L_A = \lambda_1 L_{A_1} + \lambda_2 L_{A_2}$. Благодаря этим обстоятельствам все высказанные утверждения прямо вытекают из соотвествующих свойств обычной суперпозиции линейных операторов и могут быть доказаны без обращения к координатам и без вычисления частных производных. Совсем неплохо владеть и этим способом рассуждений.

Например, линейность скобки Пуассона по первому сомножителю может быть доказана следующим образом: если $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, то

$$L_{[A,B]} = L_B L_A - L_A L_B = L_B (\lambda_1 L_{A_1} + \lambda_2 L_{A_2}) - (\lambda_1 L_{A_1} + \lambda_2 L_{A_2}) L_B =$$

$$\lambda_1 (L_B L_{A_1} - L_{A_1} L_B) + \lambda_2 (L_B L_{A_2} - L_{A_2} L_B) = \lambda_1 L_{[A_1,B]} + \lambda_2 L_{[A_2,B]} = L_{\lambda_1 [A_1,B] + \lambda_2 [A_2,B]},$$

откуда

$$[A, B] = \lambda_1 [A_1, B] + \lambda_2 [A_2, B].$$

Разумеется, точно также устанавливается линейность по второму сомножителю, хотя проще воспользоваться уже доказанным, сославшись на очевидную — прошу прощения за вынужденный каламбур — *антикоммутативность коммутатора:*

$$[A, B] = -[B, A].$$

Если предыдущие два свойства скобки Пуассона нетрудно установить с помощью координат, то мне как–то неловко и даже страшновато предлагать читателю таким путем попытаться проверить справедливость тождества Якоби. Между тем, дифференциальный оператор, отвечающий полю $[[A, B], C]$, определяется равенством

$$L_{[[A,B],C]} = L_C L_{[A,B]} - L_{[A,B]} L_C = L_C (L_B L_A - L_A L_B) - (L_B L_A - L_A L_B) L_C.$$

Раскрывая скобки (обычные — не Пуассона...), получаем

$$L_{[[A,B],C]} = L_C L_B L_A - L_C L_A L_B - L_B L_A L_C + L_A L_B L_C.$$

Циклическая перестановка приводит к формуле

$$L_{[[B,C],A]} = L_A\, L_C\, L_B - L_A\, L_B\, L_C - L_C\, L_B\, L_A + L_B\, L_C\, L_A.$$

Аналогично,

$$L_{[[C,A],B]} = L_B\, L_A\, L_C - L_B\, L_C\, L_A - L_A\, L_C\, L_B + L_C\, L_A\, L_B.$$

Приятно убедиться, что в сумме двенадцати тройных произведений все слагаемые взаимно уничтожаются. Таким образом, полю в левой части тождества Якоби отвечает нулевой дифференциальный оператор, а тогда и само это поле нулевое. Предложение доказано.

4. Скобка Пуассона гладких функций

Познакомимся еще с одной конструкцией, представляющей собой, в частности, важный элемент математического аппарата аналитической механики. Пусть гладкие функции u и v зависят от $2n$ переменных, разделенных на две группы: $q_1, \ldots, q_n$ и $p_1, \ldots, p_n$. Их *скобкой Пуассона* называют новую функцию

$$(u,v) := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right).$$

Пример. Как легко убедиться, для всех пар переменных, которые тоже можно рассматривать как функции, скобки Пуассона считаются по формулам:

$$(q_i, q_j) = 0, \qquad (q_i, p_j) = \delta_{ij}, \qquad (p_i, q_j) = -\delta_{ij}, \qquad (p_i, p_j) = 0.$$

где δ_{ij} — символ Кронеккера, означающий 0, когда $i \neq j$, и равный 1 при $i = j$.

Предложение 1. *Скобка Пуассона билинейна:*

$$(\lambda_1\, u_1 + \lambda_2\, u_2,\ v) = \lambda_1\, (u_1, v) + \lambda_2\, (u_2, v),$$

$$(u,\ \lambda_1\, v_1 + \lambda_2\, v_2) = \lambda_1\, (u, v_1) + \lambda_2\, (u, v_2),$$

и антисимметрична:

$$(u,v) = -(v,u).$$

Если же одна из функций представлена в виде произведения, скобка Пуассона вычисляется по правилу Лейбница:

$$(u_1\, u_2,\ v) = u_1\, (u_2, v) + u_2\, (u_1, v),$$

$$(u,\ v_1\, v_2) = v_1\, (u, v_2) + v_2\, (u, v_1).$$

Докажите это прямым вычислением. Как и выше, полезно учесть, что антисимметричность скобки позволяет проверку билинейности и правила Лейбница сократить вдвое: например, осуществить ее лишь для первого сомножителя.

Более элегантный способ рассуждений основан на применении следующей конструкции. С каждой гладкой функцией a от изучаемых двух групп переменных можно связать векторное поле

$$A \; = \; \left(\frac{\partial a}{\partial p_1}, \, \ldots \, , \frac{\partial a}{\partial p_n}, \, -\frac{\partial a}{\partial q_1}, \, \ldots \, , -\frac{\partial a}{\partial q_n} \right).$$

Его называют *гамильтоновым полем,* а породившую его функцию — *гамильтонианом* этого поля.

Если обозначить гамильтоновы поля, отвечающие рассмотренным выше функциям u и v, соответствующими заглавными буквами U и V, то, как легко заметить, сопоставляя определения,

$$(u, v) = L_V \, u, \quad \text{или} \quad (u, v) = -L_U \, v.$$

Таким образом, линейность по каждому сомножителю и правило Лейбница для скобки Пуассона двух функций вытекает из уже известных нам аналогичных свойств дифференциальных операторов. Другое, менее тривиальное, применение эти наблюдения находят в доказательстве следующего утверждения.

Предложение 2. *Как и для векторных полей, скобка Пуассона гладких функций удовлетворяет тождеству Якоби:*

$$((a, b), c) + ((b, c), a) + ((c, a), b) = 0.$$

Доказательство. Левая часть этого равенства, если раскрыть ее в соответствии с определением скобки Пуассона, представляет собой сумму огромного числа слагаемых, каждое из которых — с точностью до знака — имеет вид произведения первых частных производных каких–либо двух из наших функций a, b, c и частной производной второго порядка оставшейся функции. При этом, например, вторые производные функции a появляются только в тех случаях, когда a спрятана под двумя скобками Пуассона, т. е. они могут быть только в $((a, b), c)$ и в $((c, a), b)$. Однако,

$$((a, b), c) + ((c, a), b) = L_C \, (a, b) + L_B \, (c, a) = L_C \, L_B \, a - L_B \, L_C \, a = L_{[B,C]} \, a,$$

Таким образом, указанную сумму можно представить как результат действия на функцию a дифференциального оператора первого порядка, так что на самом деле никаких вторых производных функции a в этой сумме нет. Разумеется, то же самое относится к функциям b и c. Итак, все слагаемые в левой части тождества Якоби взаимно уничтожаются. Предложение доказано.

Предложение 3. *Скобка Пуассона* $[A, B]$ *гамильтоновых векторных полей* A *и* B *тоже является гамильтоновым векторным полем, а его гамильтонианом служит скобка Пуассона* (a, b) *гамильтонианов* a *и* b *исходных полей* A *и* B.

Прямое доказательство. Выпишем, например, первую компоненту гамильтонова поля, отвечающего скобке (a, b) :

$$\frac{\partial}{\partial p_1}(a,b) = \frac{\partial}{\partial p_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial a}{\partial q_i}\frac{\partial b}{\partial p_i} - \frac{\partial a}{\partial p_i}\frac{\partial b}{\partial q_i}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial p_1\,\partial q_i}\frac{\partial b}{\partial p_i} + \frac{\partial a}{\partial q_i}\frac{\partial^2 b}{\partial p_1\,\partial p_i} - \frac{\partial^2 a}{\partial p_1\,\partial p_i}\frac{\partial b}{\partial q_i} - \frac{\partial a}{\partial p_i}\frac{\partial^2 b}{\partial p_1\,\partial q_i}\right).$$

А теперь посчитаем первую компоненту скобки Пуассона векторных полей

$$A = \left(\frac{\partial a}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial a}{\partial p_n}, -\frac{\partial a}{\partial q_1}, \ldots, -\frac{\partial a}{\partial q_n}\right) \quad \text{и} \quad B = \left(\frac{\partial b}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial b}{\partial p_n}, -\frac{\partial b}{\partial q_1}, \ldots, -\frac{\partial b}{\partial q_n}\right),$$

не забывая в определении этой конструкции заменить n на $2n$ и учитывая, что прежние обозначения переменных связаны с новыми соотношением

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n).$$

В результате мы получим следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial b}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial a}{\partial p_1} - \frac{\partial b}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial a}{\partial p_1} - \frac{\partial a}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial b}{\partial p_1} + \frac{\partial a}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial b}{\partial p_1}\right).$$

Остается сравнить эту формулу с предыдущей, как всегда, воспользовавшись симметричностью смешанных производных. Точно так же сравниваются и другие компоненты изучаемых нами двух векторных полей. Предложение доказано.

Изящное доказательство. Рассмотрим скобку $c = (a, b)$ и отвечающее ей гамильтоново поле C. Наша задача — доказать, что $C = [A, B]$. Для этого достаточно сравнить действие отвечающих этим полям дифференциальных операторов на произвольную функцию u. Пользуясь отмеченным выше выражением скобки Пуассона двух функций через значение соответствующего дифференциального оператора, а также тождеством Якоби, мы приходим к следующим соотношениям:

$$L_C\, u = (u, c) = -(c, u) = -((a, b), u) = ((b, u), a) + ((u, a), b) =$$

$$L_A\,(b, u) + L_B\,(u, a) = -L_A\, L_B\, u + L_B\, L_A\, u = L_{[A,B]}\, u,$$

откуда и следует нужное равенство. Предложение доказано.

5. Преобразование Лежандра

Пусть гладкая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ такова, что соотношения

$$y_i \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n), \qquad i = 1, \dots, n$$

задают диффеоморфный переход от переменных $x_1, \dots, x_n$ к переменным $y_1, \dots, y_n$. Тогда любую гладкую функцию от $x_1, \dots, x_n$, вслед за самими этими переменными, можно представлять себе как гладкую функцию от $y_1, \dots, y_n$.

Именно так понимая правую часть равенства

$$g(y_1, \dots, y_n) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i \;-\; f(x_1, \dots, x_n),$$

мы определим новую гладкую функцию g от новых переменных $y_1, \dots, y_n$, которую называют *преобразованием Лежандра* функции f .

Предложение 1. *Старые переменные выражаются через новые формулами*

$$x_i \;=\; \frac{\partial g}{\partial y_i}(y_1, \dots, y_n), \qquad i \;=\; 1, \dots, n.$$

Доказательство. В силу «инвариантности формы» первого дифференциала

$$dg = \sum_{i=1}^{n}(x_i\, dy_i + y_i\, dx_i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, dy_i.$$

С другой стороны,

$$dg = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}(y_1, \dots, y_n)\, dy_i.$$

Отсюда, благодаря линейной независимости функционалов $dy_1, \dots, dy_n$, и вытекает нужный нам вывод. Предложение доказано.

Как мы видим, отображение $(\partial g/\partial y_1, \dots, \partial g/\partial y_n)$ служит обратным к диффеоморфизму $(\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_n)$, а это означает, в частности, что к функции g тоже можно применить преобразование Лежандра. Если же записать соотношение, определяющее функцию g, в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \;-\; g(y_1, \dots, y_n),$$

то станет ясно, что преобразование Лежандра функции g равно f. Итак, мы приходим к следующему важному выводу.

Предложение 2. *Преобразование Лежандра инволютивно. Это значит, что повторное его применение всегда возможно и приводит к исходной функции.*

Пример 1. Пусть гладкая функция одной переменной имеет гладкую обратную. Тогда преобразование Лежандра ее первообразной представляет собой первообразную обратной функции.

Прежде всего, это утверждение прямо вытекает из одномерной версии первого предложения. С другой стороны, оно легко проверяется непосредственно. Наконец, полезно обратить внимание на то, что эта задача уже встречалась нам в задании по теме «Восстановление функции по ее производной», а здесь лишь переформулирована при более жестких предположениях и в иных терминах.

Итак, пусть гладкие функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ вещественных переменных x и y взаимно обратны. Рассмотрим еще пару гладких функций $f(x)$ и $g(y)$, связанных — на наш взгляд — невыразимо красивой формулой:

$$f(x) + g(y) = xy.$$

Разумеется, таких функций не бывает. Точнее, не бывает, если равенство понимать буквально (впрочем, почему?). Мы же имеем в виду, что в этой формуле $y = \varphi(x)$, или, что то же самое, $x = \psi(y)$. Иными «словами»,

$$g(y) = y\psi(y) - f(\psi(y)) \quad \text{и} \quad f(x) = x\varphi(x) - g(\varphi(x)).$$

Как легко теперь видеть, $f'(x) = \varphi(x)$ тогда и только тогда, когда $g'(y) = \psi(y)$.

Замечание. Важно подчеркнуть, что в этих рассуждениях ничего не изменится и в общем, многомерном, случае, если только производную понимать как матрицу Якоби, а выражение xy — как скалярное произведение элементов x и y арифметического пространства.

Пример 2. На полупрямой $x > 0$ рассмотрим степенную функцию $f(x) = x^\alpha/\alpha$, где $\alpha > 1$. Докажем, что к ней применимо преобразование Лежандра, а его результатом будет заданная на полупрямой $y > 0$ степенная функция $g(y) = y^\beta/\beta$, чей показатель $\beta > 1$ однозначно определяется из соотношения $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

В самом деле, функция $y = f'(x) = x^{\alpha-1}$ взаимно однозначна при $x > 0$, причем обратная к ней функция, очевидно, определена для всех значений $y > 0$ и задается формулой $x = y^{\beta-1}$. Отсюда $x^\alpha = xy = y^\beta$, а тогда

$$g(y) = x\,y - f(x) = x\,x^{\alpha-1} - x^\alpha/\alpha = x^\alpha/\beta = y^\beta/\beta.$$

Пример 3. Невырожденная квадратичная форма допускает лежандрово преобразование. Его результатом служит тоже невырожденная квадратичная форма. Значения этих двух форм в соответствующих точках равны.

«Координатные» рассуждения. В самом деле, пусть

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

где матрицу $A = (a_{ij})$ мы можем и будем считать симметричной. Тогда

$$y_i := \frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Невырожденность формы f означает обратимость матрицы A. При выполнении этого условия переменные $x_1, \ldots, x_n$ однозначно и линейно выражаются через новые переменные $y_1, \ldots, y_n$, а именно: если матрица $B = (b_{ij})$ обратна к A, то

$$x_i = b_{i1} y_1 + \ldots + b_{in} y_n, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Это показывает нам, в частности, что к невырожденной квадратичной форме действительно можно применить преобразование Лежандра.

Далее, как легко видеть,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} y_i y_j.$$

Убедимся, что из этих замечательных равенств вытекают остальные высказанные нами утверждения. Во–первых,

$$g(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} y_i y_j.$$

Так как матрица B, вслед за A, симметрична и обратима, то g представляет собой невырожденную квадратичную форму. Во–вторых,

$$g(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} y_i y_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = f(x_1, \ldots, x_n),$$

так что формы f и g в соответствующих точках принимают равные значения.

«Матричные» рассуждения. Трудно удержаться, пользуясь случаем, не сказать несколько слов о значении системы удобных понятий и выразительных обозначений. Впрочем, разговор на эту тему мы заменим одним конкретным примером.

Итак, пусть буквы x и y означают элементы арифметического пространства, а символ (x, y) — их стандартное скалярное произведение. Каждая квадратичная форма $f(x)$ однозначно может быть записана в виде $f(x) = (Ax, x)/2$, где A — симметричная матрица. Присутствие здесь «половинного» множителя вряд ли озадачит нашего читателя: он уже знает, что именно благодаря этой половинке «новая» переменная y выражается через «старую» x особенно простой формулой $y = Ax$. Имеющееся у нас условие невырожденности формы $f(x)$ означает, по определению, что матрица A обратима, а значит, $x = By$, где $B = A^{-1}$. Таким образом, к форме $f(x)$ можно применить преобразование Лежандра. Оно приводит нас к новой функции

$$g(y) := (x, y) - f(x) = (By, y) - \frac{1}{2}(ABy, By) = \frac{1}{2}(By, y).$$

Мы видим, что $g(y)$ — невырожденная квадратичная форма, поскольку матрица B, вслед за A, симметрична и обратима. Нам осталось заметить, что

$$g(y) = (x, Ax) - \frac{1}{2}(Ax, x) = \frac{1}{2}(Ax, x) = f(x).$$

Словом, мы еще раз доказали все интересовавшие нас утверждения.

Гессианом гладкой функции называют определитель матрицы, составленной из вторых ее частных производных. Как легко видеть, гессиан функции — это якобиан системы ее первых частных производных.

Предложение 3. *Если функции связаны между собой лежандровым преобразованием, то произведение их гессианов, посчитанных в соответствующих точках, равно единице.*

Доказательство. Нужно лишь заметить, что гессианы этих функций представляют собой якобианы взаимно обратных гладких отображений. Предложение доказано.

Предложение 4. *Преобразование Лежандра применимо к любой гладкой функции вблизи каждой точки области ее определения, где гессиан отличен от нуля.*

Доказательство. Достаточно сослаться на теорему об обратном отображении, которую в нашей ситуации можно сформулировать так: система частных производных гладкой функции представляет собой диффеоморфное отображение вблизи каждой точки, где гессиан функции не равен нулю. Предложение доказано.

6. Уравнения Лагранжа и Гамильтона

В *лагранжевой механике* каждая механическая система задается некоторой функцией $L = L(q_1, \ldots, q_n, v_1, \ldots, v_n, t)$, называемой *функцией Лагранжа* системы, или ее *лагранжианом.* Переменные q_i и v_i называют соответственно *обобщенными координатами* и *обобщенными скоростями.* Всякое движение системы, т. е. изменение ее состояния с течением времени t описывается набором функций $q_i = q_i(t)$, удовлетворяющих системе дифференциальных *уравнений Лагранжа:*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Здесь при каждом i после дифференцирования L по q_i и по v_i делают подстановки $v_1 = \dot{q}_1, \ldots, v_n = \dot{q}_n$, в результате чего получается n дифференциальных уравнений, связывающих переменную t, функции $q_1, \ldots, q_n$ и их производные по t первого и второго порядков.

В *гамильтоновой* механике каждая механическая система задается некоторой функцией $H = H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$, называемой *гамильтонианом* системы. Переменные q_i называют здесь прежним образом, а переменные p_i — *обобщенными импульсами.* Всякое движение системы описывается наборами функций $q_i = q_i(t)$ и $p_i = p_i(t)$, удовлетворяющих системе дифференциальных *уравнений Гамильтона:*

$$\dot{q}_i \;=\; \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i \;=\; -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Предложение 1. *Пусть гамильтониан H как функция обобщенных импульсов является результатом лежандрова преобразования лагранжиана L по обобщенным скоростям:*

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}, \qquad H = \sum_{i=1}^{n} v_i p_i - L.$$

Тогда справедливы соотношения

$$v_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t},$$

где функции от разных наборов переменных, естественно, считаются в точках, связанных лежандровым преобразованием.

Доказательство. Посчитаем дифференциал

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt,$$

пользуясь определением гамильтониана:

$$dH = \sum_{i=1}^{n} p_i dv_i + \sum_{i=1}^{n} v_i dp_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v_i} dv_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt =$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i dp_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Сравнивая коэффициенты перед dp_i, dq_i и dt, мы приходим к нужным формулам. Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть лагранжиан и гамильтониан связаны преобразованием Лежандра. Тогда системы уравнений Лагранжа и Гамильтона эквивалентны.*

Доказательство. Предположим, что набор функций $q_i = q_i(t)$ является решением системы Лагранжа. Полагая $v_i = \dot{q}_i(t)$, построим соответствующую функцию $p_i = p_i(t)$. Утверждается, что функции $q_i = q_i(t)$ и $p_i = p_i(t)$ удовлетворяют системе Гамильтона. В самом деле, согласно предыдущему предложению,

$$\dot{q}_i = v_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Пусть теперь, напротив, функции $q_i = q_i(t)$ и $p_i = p_i(t)$ решают систему Гамильтона. Тогда, в силу того же предложения,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = v_i, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} = \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i},$$

так что набор функций $q_i = q_i(t)$ служит решением системы уравнений Лагранжа. Предложение доказано.

Замечательный класс систем изучает *механика Ньютона.* Эти системы называют *потенциальными.* Каждая из них задается некоторой функцией U переменных $q_1, \ldots, q_n$. Ее называют *потенциальной энергией.* Всякое движение системы описывается набором функций $q_i = q_i(t)$, удовлетворяющих системе дифференциальных *уравнений Ньютона:*

$$\ddot{q}_i + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0.$$

Если бы для теории потенциальных механических систем решили выбрать *символ,* им, безусловно, оказалась бы каноническая квадратичная форма

$$T = \frac{1}{2}\sum_i v_i^2.$$

Эту форму называют *кинетической энергией.* Она — общая для всех потенциальных механических систем.

Предложение 3. *Разность $L = T - U$ кинетической и потенциальной энергий служит лагранжианом системы Ньютона в том смысле, что эта система эквивалентна системе Лагранжа, отвечающей функции L. Сумма $H = T + U$, называемая полной энергией системы и представляющая собой преобразование Лежандра функции L, служит гамильтонианом соответствующей системы Гамильтона.*

Доказательство. Действительно, учитывая соотношения $v_i = \dot{q}_i$, мы приходим к равенствам

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{d}{dt}v_i = \ddot{q}_i, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i},$$

откуда и вытекает утверждение об эквивалентности уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \text{и} \quad \ddot{q}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Второе утверждение справедливо для существенно более широкого класса механических систем. А именно, пусть функция Лагранжа имеет вид $L = T - U$, где потенциальная энергия U зависит только от координат q_i, а кинетическая энергия T представляет собой невырожденную квадратичную форму относительно скоростей v_i, но коэффициенты ее могут зависеть от координат и времени. Покажем, что и в этом случае сумма $H = T + U$, рассматриваемая как функция координат q_i и импульсов $p_i = \partial L/\partial v_i$, выполняет роль гамильтониана.

В самом деле, в силу тождества Эйлера,

$$\sum_i v_i\, p_i = \sum_i v_i\, \frac{\partial L}{\partial v_i} = \sum_i v_i\, \frac{\partial T}{\partial v_i} = 2T.$$

Таким образом,

$$H = \sum_i v_i\, p_i - L = 2T - (T - U) = T + U.$$

Предложение доказано.

Пример. Одномерная система $\ddot{q} = f(q)$ всегда потенциальна, поскольку может быть записана в форме

$$\ddot{q} + U'(q) = 0, \quad \text{где} \quad U(q) = -\int f(q)\, dq.$$

В этом случае

$$H = \frac{p^2}{2} + U\,(q), \quad \frac{\partial H}{\partial q} = U'(q), \qquad \frac{\partial H}{\partial p} = p.$$

Таким образом, одномерное уравнение Ньютона эквивалентно простейшей системе уравнений Гамильтона

$$\dot{q} = p, \qquad \dot{p} = -U'(q).$$

Здесь, как и во всех случаях, когда гамильтониан не зависит явно от времени, функция H является *первым интегралом* системы: если пара (q, p) является ее решением, то

$$\frac{d}{dt} H(q, p) = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} \equiv 0.$$

С точки зрения механики — это *закон сохранения энергии:* всякое движение в потенциальной системе происходит с постоянной энергией. Геометрически это означает, что каждая фазовая траектрия системы целиком располагается в одном из множеств уровня функции Гамильтона. Так механика превращается в геометрию...

7. Канонические преобразования

Если в пространстве с координатами $q_1, \ldots, q_n, \; p_1, \ldots, p_n$ перейти к новым переменным $Q_1, \ldots, Q_n, \; P_1, \ldots, P_n$, то гамильтонова система, вообще говоря, утратит свою красивую симметричную форму. Однако существуют такие замечательные преобразования — они называются *каноническими,* — после которых любая система Гамильтона выглядит так же, как прежде:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}.$$

Предложение. *Преобразование будет каноническим тогда и только тогда, когда скобки Пуассона новых переменных по старым удовлетворяют соотношениям:*

$$(Q_i, Q_j) = 0, \quad (Q_i, P_j) = \delta_{ij}, \quad (P_i, P_j) = 0.$$

Доказательство. Выясним, как преобразуются уравнения при замене переменных:

$$\dot{Q}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\,\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\,\dot{p}_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial p_k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial p_k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial q_k}\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial Q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\right)\frac{\partial H}{\partial Q_j} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k}\right)\frac{\partial H}{\partial P_j}.$$

Таким образом,

$$\dot{Q}_i = \sum_{j=1}^{n} (Q_i, Q_j)\,\frac{\partial H}{\partial Q_j} + \sum_{j=1}^{n} (Q_i, P_j)\,\frac{\partial H}{\partial P_j}.$$

Правая часть этого равенства сводится к $\partial H / \partial P_i$, какова бы ни была функция H, в том и только том случае, когда

$$(Q_i, Q_j) = 0, \qquad (Q_i, P_j) = \delta_{ij}.$$

Аналогично,

$$\dot{P}_i = \sum_{j=1}^{n} (P_i, Q_j)\,\frac{\partial H}{\partial Q_j} + \sum_{j=1}^{n} (P_i, P_j)\,\frac{\partial H}{\partial P_j},$$

и если мы хотим, чтобы это при любых H было равно $-\partial H/\partial Q_i$, нужно, чтобы выполнялись условия

$$(P_i, Q_j) = -\delta_{ij}, \qquad (P_i, P_j) = 0.$$

Предложение доказано.

Пример. Посмотрим, что означают указанные условия в простейшем случае, когда $n = 1$, а значит, у нас всего две переменные q и p и две зависящие от них функции Q и P. Таким образом, у нас три условия:

$$(Q, Q) = 0, \qquad (Q, P) = 1, \qquad (P, P) = 0.$$

Первое и последнее из них выполнены автоматически. Что же касается оставшегося, то его, очевидно, можно выразить, опираясь на понятие якобиана:

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} \equiv 1.$$

Итак, если говорить на языке геометрии, речь идет о гладких преобразованиях евклидовой плоскости, сохраняющих площади малых фигур. Хотелось бы знать, как устроены такие преобразования. Какие из них взаимно однозначны? Когда областью значений окажется вся плоскость? Какие преобразования сочетают оба указанные свойства? По–французски — это вопросы об инъекциях, сюръекциях и биекциях...

Особый интерес вызывают *полиномиальные* преобразования, когда функции Q и P представляют собой многочлены от q и p. Согласно знаменитой *гипотезе якобиана*, переменные q и p можно предствить в виде многочленов от Q и P. Этой проблеме уже около семи десятков лет. Ей посвятили невероятные усилия и творческие муки многие выдающиеся исследователи. Нет никаких сомнений в том, что и сегодня она не дает покоя утонченным умам, хотя их владельцы и не склонны признаваться в этом. Так или иначе, но до сих пор ответа не знает никто...