Математический анализ

Лектор — Владимир Вениаминович Иванов

1 семестр

Глава 1. Физика не ждет

Основы одномерного анализа

1. Предел и непрерывность функции одной вещественной переменной. Непрерывность элементарных функций. «Замечательные» пределы и первые асимптотические формулы.

2. Производная и дифференциал. Геометрическая и физическая интерпретации. Правила дифференцирования. Таблица производных. Повторное дифференцирование. Локальная формула Тейлора.

3. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица интегралов. Общие методы и простейшие специальные приемы интегрирования. Определенный интеграл «Ньютона — Лейбница».

Дифференциальная геометрия гладких линий

4. Вектор-функции скалярного аргумента. Дифференцирование вектор-функций: геометрическое определение и выражение в координатах. Производные скалярного, векторного и смешанного произведений переменных векторов. Интегрирование вектор-функций.

5. Гладкие линии на плоскости: длина линии и натуральный параметр; касательная и нормаль; кривизна; как увидеть центр кривизны нарисованной линии; эволюта и эвольвента.

6. Гладкие линиии в пространстве: касательный вектор, главная нормаль, бинормаль; кривизна и кручение; формулы Френе; локальное строение проекций линии на соприкасающуюся, нормальную и спрямляющую плоскости.

Простейшие дифференциальные уравнения

7. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Одномерные динамические системы. Линейные уравнения, метод вариации постоянной.

8. Уравнение колебаний: выход в комплексную область, характеристический многочлен; свободные колебания, простые и кратные корни, гармонический осциллятор, затухающие колебания; вынужденные колебания, резонанс; метод комплексной амплитуды.

9. Консервативная система Ньютона с одной степенью свободы: фазовая плоскость, закон сохранения энергии, вид фазовых линий около устойчивого и неустойчивого положений равновесия, построение фазового портрета по графику потенциальной энергии.

Глава 2. Предел и непрерывность функций одной переменной

10. Полнота числовой прямой.

Системы натуральных, целых, рациональных и вещественных чисел. Арифметические операции и отношение порядка. Числовая прямая. Теорема Дедекинда о полноте числовой прямой. Принцип вложенных отрезков. Счетные множества, мощность континуум и теоремы Кантора. Точные границы числовых множеств — и́нфимум и супре́мум. Расширенная числовая прямая.

11. Числовые последовательности

Предел последовательности. Предел и неравенства. Арифметические свойства предела. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Число e как единица и символ математического анализа. Подпоследовательности и частичные пределы. Теорема Больцано — Вейерштрасса. Нижний и верхний пределы. Критерий Коши сходимости последовательности. Сумма числового ряда.

12. Предел функции

Предел функции в смысле Коши. Секвенциальный подход Гейне. Общие свойства предельного перехода. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел. Односторонние пределы монотонных функций. Функциональная версия критерия Коши.

13. Непрерывные функции

Два подхода к понятию непрерывности. Операции над функциями, сохраняющие непрерывность. Теорема Больцано — Коши о промежуточном значении. Условие непрерывности монотонной функции. Теорема о непрерывности обратной функции. Теорема Вейерштрасса о наименьшем и наибольшем значениях. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

Глава 3. Дифференцируемые функции одной переменной

14. Обоснование дифференциального исчисления

Производная и арифметические операции. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Дифференцирование параметрически и неявно заданных функций. Доказательства формул для производных основных элементарных функций: степенных, показательных, логарифмических, прямых и обратных тригонометрических, прямых и обратных гиперболических. Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лейбница.

15. Дифференциальные «теоремы о среднем»

Теорема Ферма о производной в точке экстремума, ее применение к поиску минимума и максимума функции. Значения функции вблизи точки, где производная отлична от нуля. Теорема Дарбу о промежуточном значении производной. Теорема Ролля о нуле производной. Теорема Лагранжа о конечном приращении. Теорема Коши о приращении плоской вектор-функции.

16. Исследование дифференцируемых функций

Условие монотонности дифференцируемой функции. Точки локального экстремума. Критические точки и необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума в терминах первой производной. Исследование невырожденных критических точек. Выпуклые функции. Условия выпуклости в терминах первой и второй производных. Точки перегиба. Классические неравенства анализа.

17. Асимптотические сравнения

Эквивалентные функции. Символы o-малое и O-большое, правила обращения с ними. Два правила Бернулли — Лопиталя. Линейные асимптоты: горизонтальные, наклонные, вертикальные. Сравнение асимптотического поведения основных элементарных функций. Уроки рисования: правильные и красивые изображения линий, заданных явно, параметрически, неявно.

18. Асимптотические разложения

Полином Тейлора. Локальная формула Тейлора (остаток в форме Пеано). Пять основных асимптотических формул: для экспоненты, синуса, косинуса, логарифма, общей степенной функции. Техника асимптотических разложений: арифметические действия, разложение сложной и обратной функции, дифференцирование и интегрирование асимптотических формул. Ряд Тейлора — первое знакомство.

Глава 4. Интегрирование функций одной переменной

19. Определенный интеграл

Интегральные суммы и их сходимость. Интеграл Римана. Критерий Дарбу. Интегрируемость непрерывной на отрезке функции. Общие свойства интеграла — линейность, аддитивность, монотонность. Оценки среднего значения функции на отрезке. Взвешенное среднее. Интегральная теорема о среднем значении.

20. Формула Ньютона — Лейбница

Построение первообразной непрерывной на промежутке функции с помощью интеграла. Формула Ньютона — Лейбница. Дифференцирование интеграла с переменными пределами интегрирования. Формула интегрирования по частям. Формула замены переменной. Интегральная форма тейлоровского остатка. «Остаточные» формулы Лагранжа и Коши.

21. Несобственные интегралы

Интегрирование неограниченных функций. Интегрирование по неограниченному промежутку. Инртегрирование по частям и замена переменных в несобственных интегралах. Критерий Коши и признак Вйерштрасса сходимости несобственного интеграла. Анализ степенных особенностей. Признаки Дирихле и Абеля. Сходимость абсолютная и условная. Главное значение расходящегося интеграла.

22. Эйлеровы интегралы

Гамма-функция Эйлера. Формула понижения. Гамма-функции и факториал. Формула дополнения и значения гамма-функции для полуцелого аргумента. График гамма-функции. Бета-функция Эйлера. Выражение бета-функции через гамма-функцию. Асимптотика гамма-функции. Формула Стирлинга.

23. Примеры приложений интеграла

Геометрические иллюстрации: еще раз о длине гладкой линии, площадь криволинейной трапеции и криволинейного сектора, площадь поверхности вращения, объем тела вращения. Механические иллюстрации: линейная плотность и масса стержня, статические моменты и центр масс, моменты инерции и энергия вращения.

Глава 5. Дифференцируемые функции нескольких переменных

24. Геометрия и топология арифметического пространства

Точки и векторы. Скалярное произведение. Норма и расстояние. Полнота арифметического пространства. Ограниченные множества. Многомерная теорема Больцано — Вейерштрасса. Окрестности. Внутренность, замыкание и граница множества. Открытые и замкнутые множества. Компактные множества. Связные множества.

25. Непрерывные отображения

Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Системы функций как отображения арифметических пространств. Координатные функции. Предел и непрерывность отображения. Непрерывные прообразы открытых и замкнутых множеств. Множества, определяемые неравенствами. Непрерывные отображения компактных множеств. Теорема Вейерштрасса об экстремальных значениях. Непрерывные образы связных множеств. Гомеоморфизмы.

26. Гладкие функции

Частные производные, правила их вычисления. Линейные формы и полный дифференциал функции нескольких переменных. Класс гладких функций. Дифференцируемость гладкой функции. Дифференцирование сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Однородные функции и тождество Эйлера. Производная по данному направлению. Градиент функции нескольких переменных, его геометрический смысл.

27. Повторное дифференцирование

Частные производные второго порядка. Симметричность смешанных производных. Квадратичные формы и второй дифференциал.

Частные производные высших порядков. Степенные формы и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница. Значение дифференциала на векторе как результат дифференцирования функции вдоль этого вектора. Многомерная формула Тейлора.

28. Локальные экстремумы

Точки локального экстремума функции нескольких переменных. Критические точки и первое необходимое условие экстремума. Полуопределенные квадратичные формы и второе необходимое условие экстремума. Знакопеременные квадратичные формы и признак отсутствия экстремума. Оценка знакоопределенной квадратичной формы и достаточное условие экстремума.

29. Дифференцируемые отображения

Дифференцируемость отображения, матрица Якоби. Умножение матриц Якоби при суперпозиции отображений. Диффеоморфизмы. Матрица Якоби обратного отображения. Преобразование гладких линий и касательных к ним. Якобиан системы функций, или функциональный определитель. Умножение и обращение якобианов. Двумерные и трехмерные якобианы как локальные коэффициенты искажения площади и объема.

Литература

1. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2, 3.
2. Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа. Т. 1, 2, 3.
3. А. В. Погорелов. Дифференциальная геометрия.
4. Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
5. В. И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
6. В. И. Арнольд. Математические методы классической механики.
7. Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.
8. Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1, 2, 3.
9. А. Ф. Филиппов. Сборник задач и упражнений по дифференциальным уравнениям.
10. В. Д. Бутузов, Н. И. Крутицкая, Г. Н. Медведев, А. А. Шишкин. Математический анализ в вопросах и задачах.

Задачи для семинаров и самостоятельной работы

Задачи для семинаров выбираются преподавателем из приводимого ниже списка. Выборка должна в достаточной степени отражать содержание каждого раздела. Остальные задачи — это *задания*. Студенты решают их самостоятельно. Задачи из заданий сдаются регулярно при личных встречах студента и преподавателя в специально отведенное для этого время. За два-три нарушения сроков сдачи без уважительной причины ребенок отчисляется из университета по собственному желанию деканата, если только его не спасет чудо. Сказанное не относится к первому заданию, для которого указан иной срок, а также к концу семестра, где темп жизни выше разумного. Символ * означает «для тех, кому делать нечего» ...

1. Школьные сюжеты (*Сдать до Нового Года*)

Символика теории множеств. Отображения и функции. Математическая индукция. Биномиальная формула.

2. Вычисление пределов (*Сдать до 12 сентября*)

Элементарные функции. Предел и непрерывность. Замечательные пределы. Первые асимптотические формулы.

3. Правила дифференцирования (*Сдать до 26 сентября*)

Первое знакомство с производной. Производные элементарных функций. Повторное дифференцирование. Разные способы задания функций. Вектор-функции скалярного аргумента.

4. Методы интегрирования (*Сдать до 15 октября*)

Таблица неопределенных интегралов. Линейные преобразования переменной. Разложение подынтегральных выражений. Дифференнциал под знаком интеграла. Метод замены переменной. Метод интегрирования по частям. Интегрирование рациональных функций. Классические подстановки. Примеры неэлементарных интегралов. Определенный интеграл Ньютона — Лейбница. Вычисление несобственных интегралов .

P. S. Остальные задания для 1 семестра будут опубликованы, когда мы ближе познакомимся с нашими новыми первокурсниками.

1. Школьные сюжеты

Символика теории множеств

1. Может ли случиться так, что $A \subset B$ и одновременно $B \subset A$? Что можно и нужно сказать в этом случае о множествах A и B? Знаете ли вы такое множество, которое содержится в любом другом? Как его называют и как обозначают?

2. Выясните, сколько элементов содержит множество

$$\{\{x, y\},\ \{x, x, y\},\ \{y, x\},\ \{\{x\}, y\},\ \{x, \{y\}\},\ \{\{x\}, \{y\}\},\ \{\{x, y\}\}\}.$$

Будьте внимательны и не торопитесь с ответом. Для тех, кого очень беспокоит, например, аксиома фундирования и вопрос «может ли множество быть своим собственным элементом», — маленький совет: считайте x и y в этой задаче натуральными числами.

3. Опишите, как связаны между собой множества

$$A \cup B \text{ и } B \cup A, \qquad A \cap B \text{ и } B \cap A, \qquad A \setminus B \text{ и } B \setminus A.$$

Когда последние два множества совпадают?

4. Докажите следующие два тождества:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

5. Докажите еще два замечательных равенства:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

6. Убедитесь, что следующие утверждения эквивалентны:

(а) $A \subset B$, (б) $A \cup B = B$, (в) $A \cap B = A$, (г) $A \setminus B = \phi$.

7. *Симметрической разностью* двух множеств A и B называют множество

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Докажите прежде всего, что

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A).$$

Установите следующие свойства этой интересной операции:

$$A\Delta B = B\Delta A, \quad A\Delta A = \phi, \quad A\Delta\phi = A, \quad A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C.$$

Дельный совет: для доказательства последнего равенства полезно явно описать элементы множеств слева и справа от него.

8. Пусть известно, что $A\Delta B = C\Delta D$. Докажите, что в таком случае $A\Delta C = B\Delta D$ и $A\Delta D = B\Delta C$.

9. Докажите, что для любых множеств A и B существует единственное решение X уравнения

$$(A \cup X) \setminus (A \cap X) = B.$$

Найдите формулу, явно выражающую множество X через A и B. Убедитесь, что то же самое множество X удовлетворяет уравнению

$$(B \cup X) \setminus (B \cap X) = A.$$

В каких случаях решением будет пустое множество?

10*. Докажите, что пересечением «абстрактных» прямоугольников снова будет прямоугольник:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Найдите формулу, представляющую разность $(A \times B) \setminus (C \times D)$ в виде объединения не пересекающихся между собой *двух* прямоугольников. Когда уже сама эта разность — абстрактный прямоугольник?

Отображения и функции

11. Даны: отображение f и две пары множеств A_1, A_2 и B_1, B_2. Докажите тождества

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2), \quad f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

12. Выясните, как связаны между собой множества

$$f(A_1 \cap A_2) \text{ и } f(A_1) \cap f(A_2), \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) \text{ и } f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

Всегда ли здесь вместо союза «и» можно поставить знак равенства? Правильно — не всегда. А когда можно?

13. Какие из степенных функций x^n, где n означает натуральное число, взаимно однозначны на всей числовой прямой? А на положительной полупрямой?

14. Докажите, что функция f, определенная формулой

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

осуществляет биективное отображение числовой прямой на интервал $(-1, 1)$, показывая нам, что уже этот ограниченный промежуток содержит «столько же» точек, сколько имеется вещественных чисел.

15. Постройте биекцию промежутка $[0, 1)$ на промежуток $(2, 5]$. Установите взаимно однозначное соответствие между точками интервала $(0, 1)$ и отрезка $[0, 1]$.

16. Каждой паре натуральных чисел m и n поставим в соответствие число $2^{m-1}(2n-1)$. Докажите, что это соответствие взаимно однозначно, а областью его значений служит весь натуральный ряд.

17*. Кантор обнаружил, что между элементами множества, каким бы оно ни было, и всеми его подмножествами нельзя установить взаимно однозначного соответствия. Быть может, эту замечательную теорему, открытую родоначальником теории множеств, вы сочтете достойной вашего внимания. Тогда докажите ее.

18. Пусть $\varrho(x)$ означает наименьшее из расстояний от точки x числовой оси до точек 0 и 2. Таким образом,

$$\varrho(x) = \min(|x|, |x-2|).$$

Докажите, что ту же самую функцию определяет формула

$$\varrho(x) = ||x-1|-1|.$$

Иными словами, дело вовсе не в формулах. Важно только то, что чему соответствует. Постройте график функции ϱ.

19. Выберем на числовой прямой три точки a, b и c. Пусть $\varrho(x)$ означает теперь наименьшее из расстояний от точки x той же прямой до точек a, b и c. Постройте график функции ϱ.

20. Пусть $f(x)$ означает *целую часть* вещественного числа x, а именно — то единственное целое число $[x]$, которое уловлетворяет неравенствам $[x] \leq x < [x]+1$. Постройте графики функций

$$y = f(x), \quad y = f(-x), \quad y = -f(x), \quad y = -f(-x),$$

$$y = f(x+1), \quad y = f(x-1), \quad y = f(1-x), \quad y = -f(1-x),$$

$$y = f(2x), \quad y = f(x/2), \quad y = 2f(x), \quad y = f(x)/2,$$

$$y = f(3x)+1, \quad y = f(3x)-2, \quad y = 2f(1-x/3)+1.$$

Опишите геометрическим языком все рассмотренные здесь аналитические преобразования исходной функции. Вот вам необходимый для этого (и вполне достаточный) словарь: сдвиг графика вверх, вниз, влево, вправо на столько-то единиц, растяжение или сжатие во столько-то раз, отражение относительно прямой или точки.

21. Выполните то же задание для функции $f(x) = x - [x]$, вычисляющей *дробную часть* вещественнного числа.

Математическая индукция

22. Непустое подмножество натурального ряда назовем *индуктивным*, если оно вместе с любым принадлежащим ему числом n содержит и следующее за ним натуральное число $n+1$. Приведите примеры индуктивных множеств. Опишите все индуктивные множества. Что можно сказать об индуктивном множестве натуральных чисел, если оно содержит единицу?

23. Докажите методом математической индукции два тождества:

$$\text{(а) } 1+2+\ldots+n = n\,(n+1)/2,$$
$$\text{(б) } 1+3+\ldots+(2n-1) = n^2.$$

24. Вот еще две формулы, которые легко доказать по индукции:

$$\text{(а) } 3+33+\ldots+33\ldots3 = (10^{n+1}-9n-10)/27,$$

$$\text{(б) } \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}} = 2\,\cos\,(\pi/2^{n+1}).$$

Ясно, что здесь левые части обоих равенств содержат соответственно n слагаемых и n корней.

Метод математической индукции позволяет доказывать не только различные тождества. Например, с его помощью нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений.

25. Для всякого натурального n число

(а) $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ нацело делится на 19,
(б) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ делится на 11,
(в) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ кратно 133.

Далеко не всегда доказательство по индукции сводится к вычислениям или тождественным преобразованиям. Иногда нужно что-то подметить, где-то сообразить, словом — проявить нечто, напоминающее творчество.

26. Докажите, что для любого натурального $n > 1$ десятичная запись числа $2^{2^n} + 1$ оканчивается цифрой 7.

27. В дальнейшем вы не раз увидите, насколько полезным бывает порой классическое *неравенство Бернулли*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx,$$

справедливое, в частности, для всех натуральных n и вещественных $x > -1$. Докажите это неравенство. Убедитесь и в том, что оно всегда строгое, кроме тривиальных случаев, когда $n = 1$ или $x = 0$.

28. Для каждого натурального числа n докажите неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

29. Найдите и докажите формулу для n-й итерации уже знакомого вам отображения f из задачи 14.

30. Последовательность a_n определена *рекуррентным* соотношением $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$ и начальными условиями $a_0 = a_1 = 1$. Найдите выражение для всех элементов последовательности.

31. Родилась на свет пара кроликов — мальчик и девочка. Через месяц они подросли и поженились. Еще через месяц у них появились дети — тоже мальчик и девочка. Так и пошло: что ни месяц — новая парочка. Дети, естественно, брали пример с родителей и вели себя

так же. Посчитайте, сколько всего будет пар кроликов через год? А через два года? Загляните на n лет вперед. *Подсказка*: в ответе под знаком корня — ваша оценка ... за эту задачу.

32. На плоскости проведено n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. На сколько частей разбивают плоскость эти прямые?

33. На сколько частей разделится сфера n плоскостями, проходящими через ее центр, если никакие три плоскости не проходят через один и тот же диаметр?

34*. На балу присутствует равное число юношей и девушек. Так получилось, что для любой группы юношей найдется по крайней мере столько же девушек, каждая из которых имеет знакомого в этой группе. Можно ли составить пары из знакомых друг с другом партнеров так, чтобы танцевали все участники бала?

Биномиальная формула

35. *Перестановкой* конечного множества называют произвольное биективное отображение этого множества на себя. Докажите, что для непустого множества, содержащего n элементов, число всевозможных его перестановок выражается произведением всех натуральных чисел от 1 до n.

Это произведение обозначают символом $n!$ и называют *факториалом* числа n. Если считать, как этого требует беспристрастный формальный подход к делу, что «пустое отображение» является единственным биективным преобразованием пустого множества, у которого число элементов равно нулю, то естественно определить и факториал числа 0, полагая $0! = 1$. Это не только логично, но и удобно.

36. Решите еще одну простую комбинаторную задачу: если множество имеет n элементов, то сколько у него подмножеств по k элементов каждое? Если $k > n$, ответ ясен — таких подмножеств нет. Если же $0 \leq k \leq n$, он, очевидно, выражается числом

$$C_n^k := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

которое с давних пор называется *числом сочетаний* «из n по k». Буквально через минуту мы поймем, почему эти числа называют также *биномиальными* коэффициентами.

37. Докажите, что произведение любых k последовательных натуральных чисел нацело делится на факториал $k!$ числа k.

38. Докажите равенство $C_n^{n-k} = C_n^k$, не пользуясь формулой для этих чисел, но учитывая лишь их комбинаторное происхождение.

39. Все семейство биномиальных коэффициентов, как нетрудно понять, однозначно определяется следующими двумя их свойствами: при $k = 0$ и $k = n$ они равны единице, а в случае $1 \leq k \leq n$ связаны между собой замечательным соотношением

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k.$$

Докажите эти утверждения двумя способами: прямыми вычислениями и учитывая комбинаторный смысл биномиальных коэффициентов. Опираясь на них, постройте *треугольник Паскаля*, содержащий все биномиальные коэффициенты вплоть до седьмого уровня.

40. Докажите, что положительная целая степень n суммы любых чисел a и b может быть посчитана по *биномиальной формуле*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^{n-k} \, b^k,$$

которую упрямая традиция приписывает Ньютону, хотя, как утверждают знатоки, ее знал уже Омар Хайям...

41. Докажите следующие замечательные равенства:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \text{ при } n \geq 0; \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, C_n^k = 0 \text{ при } n \geq 1;$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \, C_n^k = n \, 2^{n-1} \text{ при } n \geq 1; \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k \, C_n^k = 0 \text{ при } n \geq 2.$$

42. В заключение раздела — красивая формула:

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

По секрету: представьте многочлен $(1 + x)^{2n}$ в виде $[(1 + x)^n]^2$ и вспомните о симметричности треугольника Паскаля.

2. Вычисление пределов

Предел и непрерывность

1. Постройте графики каких-нибудь функций $f(x)$, иллюстрирующие следующие ситуации:

(а) $f(x) \to 1$ при $x \to 3$,
(б) $f(x) \to 1$ при $x \to 3 - 0$,
(в) $f(x) \to 1$ при $x \to 3 + 0$,
(г) $f(x) \to 1$ при $x \to -\infty$,
(д) $f(x) \to 1$ при $x \to +\infty$.

2. Выполните аналогичное задание для того случая, когда функция стремится к отрицательной бесконечности:

(е) $f(x) \to -\infty$ при $x \to 3$,
(ж) $f(x) \to -\infty$ при $x \to 3 - 0$,
(з) $f(x) \to -\infty$ при $x \to 3 + 0$,
(и) $f(x) \to -\infty$ при $x \to -\infty$,
(к) $f(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$.

3. Наконец, то же самое сделайте при условии, что функция стремится к положительной бесконечности:

(л) $f(x) \to +\infty$ при $x \to 3$,
(м) $f(x) \to +\infty$ при $x \to 3 - 0$,
(н) $f(x) \to +\infty$ при $x \to 3 + 0$,
(о) $f(x) \to +\infty$ при $x \to -\infty$,
(п) $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

4. Сформулируйте со всей строгостью, как у самого Коши, что означает каждое из указанных выше пятнадцати предельных соотношений. Найдите конкретные примеры формул, определяющих функции с рассмотренными особенностями их поведения. Сформулируйте *в утвердительном смысле* отрицания высказываний от (а) до (п). Не прекращайте эту увлекательную работу над собой, пока не добьетесь ощущения легкости и стопроцентной уверенности.

5. По-видимому ни один студент, изучавший математический анализ, не миновал следующих трех пределов из Демидовича:

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1},\quad \text{(б)}\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1},\quad \text{(в)}\ \lim_{x\to \infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}.$$

Не нарушайте эту славную традицию. Здесь уместно подчеркнуть, что всякий раз, когда явно не указан знак бесконечности, к которой стремится аргумент x, следует рассмотреть два случая: $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Если пределы совпали, их общее значение считается пределом функции при $x \to \infty$.

6. Изучите поведение следующих трех функций

$$\text{(а)}\ y=\frac{1}{1-x^2},\quad \text{(б)}\ y=\frac{x}{1-x^2},\quad \text{(в)}\ y=\frac{(x+1)\,(x-2)}{(x-1)\,(x+2)}.$$

в граничных точках их областей определения.

7. Пусть m и n означают произвольные натуральные числа. Посчитайте пределы рациональных функций:

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1},\qquad \text{(б)}\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right).$$

$$\text{(в)}\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2},$$

8. Вычислите пределы иррациональных функций:

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2},\qquad \text{(б)}\ \lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}},$$

$$\text{(в)}\ \lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}.$$

Здесь вам придется проявить определенную изобретательность, но вскоре мы увидим, что подобные задачки алгоритмически разрешимы. На самом деле вычисление пределов *любых* элементарных функций может быть поручено компьютеру. Вряд ли стоит здесь подчеркивать, что только тот способен научить этому компьютер, кто не только овладел искусством программирования, но и освоил соответствующие понятия и методы математического анализа...

9. Постройте функцию, которая определена и терпит разрыв буквально в каждой точке числовой прямой. Может ли случиться, что квадрат такой функции всюду непрерывен? А куб?

10. Для указанных ниже трех рациональных функций определите точки разрыва и исследуйте их характер:

$$\text{(а) } y = \frac{x}{(1+x)^2}, \quad \text{(б) } y = \frac{1+x}{1+x^3}, \quad \text{(в) } y = \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}.$$

11. Аналогичное исследование проведите также для следующих трех «функций-страшилок»:

$$\text{(а) } y = \frac{1}{\sin(1/x)}, \quad \text{(б) } y = \frac{1}{1-2^{\,x/(1-x)}},$$

$$\text{(в) } y = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right).$$

12. Пусть функция $\varphi(y)$ определена для всех значений y, достаточно близких к y_0, и непрерывна при $y = y_0$. Докажите, что в таком случае для любой функции f, имеющей предел y_0 в какой-нибудь точке x_0, где сгущается область ее определения, сложная функция $\varphi(f(x))$ стремится к $\varphi(y_0)$, когда $x \to x_0$.

Таким образом, непрерывность может оказать важную услугу при вычислении пределов. Это очень полезное наблюдение, особенно в сочетании с тем замечательным обстоятельством, что любая элементарная функция непрерывна в каждой точке, где она определена.

Элементарные функции

13. Для различных значений параметров k и a укажите «естественные» области определения и опишите граничное поведение

(а) *степенных* функций x^k,
(б) *показательных* функций a^x,
(в) *логарифмических* функций $\log_a x$.

Для каждого из трех классов функций их графики собираются в «пучки, связанные» в точке $(1,1)$ у степенных, в точке $(0,1)$ у показательных и в точке $(1,0)$ у логарифмических функций. Изобразите как можно точнее эти пучки.

14. Вспомните определения и названия прямых и обратных тригонометрических функций

$$\sin x \text{ и } \arcsin x, \qquad \cos x \text{ и } \arccos x,$$

$$\operatorname{tg} x \text{ и } \operatorname{arctg} x, \qquad \operatorname{ctg} x \text{ и } \operatorname{arcctg} x.$$

Постройте правильные и красивые их графики.

Применяя к функциям, рассмотренным в двух предыдущих задачах, любое конечное число арифметических операций и «подстановок», мы получаем полный класс так называемых *элементарных функций*. Как уже было сказано, все эти функции непрерывны, что вы вправе учитывать при решении задач.

При одном и том же основании $a > 0$, не равном 1, *наклоны* графиков функций a^x и $\log_a x$ соответственно в точках $(0, 1)$ и $(1, 0)$ взаимно обратны. В дальнейшем мы поймем, как точно сформулировать это утверждение. А пока лишь отметим, что существует ровно одно основание a, при котором оба наклона равны 1. Его, вслед за Эйлером, обозначают буквой e. Подобно тому, как число

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327...,$$

выражающее отношение длины любой окружности к ее диаметру, служит великолепным символом геометрии Евклида, число e представляет собою безусловный символ математического анализа. Когда выучите эту науку, вы сможете доказать, что число e, как и π, не только иррационально, но *трансцендентно*. Это значит, что оно не является корнем ни одного многочлена с рациональными коэффициентами. Вот начало его бесконечного десятичного имени:

$$e = 2,71828182845904523536028747135\ldots.$$

Показательную функцию e^x называют *экспонентой*. Иногда пишут $\exp x$. Логарифмическую функцию с тем же основанием называют *натуральным логарифмом* и обозначают символом $\ln x$.

15. На общей координатной плоскости (x, y) нарисуйте графики функций $y = e^x$ и $y = \ln x$. Опишите характер симметрии вашего рисунка. Выразите произвольные степенные, показательные и логарифмические функции через экспоненту и натуральный логарифм.

Во многих вопросах математического анализа и необозримых его приложениях крайне полезными часто оказываются *гиперболические функции*. Для них приняты особые названия и обозначения.

16. Первые две из них — это *гиперболические синус и косинус*:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Постройте их графики, расположив их — для сравнения — на одной координатной плоскости. Проверьте тождество $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x \equiv 1$, которое объясняет названия этих функций: линия $x = \operatorname{ch} t,\ y = \operatorname{sh} t$, где параметр t пробегает всю числовую ось, представляет собой одну из ветвей гиперболы. Нарисуйте эту ветвь. Найдите формулы для гиперболических синуса и косинуса от суммы и разности аргументов, двойного аргумента.

17. Другие две функции — *гиперболические тангенс и котангенс*:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

Первая из них определена для всех вещественных x, вторая — для $x \neq 0$. Постройте графики и этих функций, также расположив их на общей координатной плоскости. Найдите формулы для гиперболических тангенса и котангенса от суммы и разности аргументов.

18. Докажите, что гиперболический синус имеет обратную функцию, которая определяется формулой

$$\operatorname{arsh} y = \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right)$$

для всех вещественных значений y. Ее название — *ареа-синус.* Что же касается гиперболического косинуса, то обратимы его сужения на отрицательную и положительную полуоси. Докажите, что обратные функции $\operatorname{arch}_- y$ и $\operatorname{arch}_+ y$ определены на полупрямой $y \geq 1$ и выглядят следующим образом:

$$\operatorname{arch}_- y = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right) \quad \text{и} \quad \operatorname{arch}_+ y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

Их можно считать ветвями двузначного *ареа-косинуса.* Постройте графики всех упомянутых здесь функций, как и прежде, на одной координатной плоскости.

19. Наконец, обратными к гиперболическим тангенсу и котангенсу функциями служат *ареа-тангенс* $\operatorname{arth} y$ и *ареа-котангенс* $\operatorname{arcth} y$. Докажите, что они вычисляются по формулам

$$\operatorname{arth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} \quad \text{и} \quad \operatorname{arcth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{y+1}{y-1}$$

для $|y| < 1$ и для $|y| > 1$ соответственно. Разумеется, вы уже догадались, что и здесь нужен совместный рисунок.

Почему в названиях обратных гиперболических функций не *дуга* (arcus), как в случае тригонометрических функций, которые по понятным причинам называют еще *круговыми*, а *площадь* (area), выяснится в интегральном исчислении.

Замечательные пределы

20. *Первым* и *вторым* замечательными пределами издавна называют следующие два соотношения:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Другие три формулы, которые наряду с предыдущими лежат в основе вычисления самых разнообразных пределов, ничуть не менее «замечательны»:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu.$$

Докажите три последние соотношения, пользуясь вторым замечательным пределом и непрерывностью элементарных функций.

Для особенно бдительных: не бойтесь «порочного круга» насчет числа e — его у нас не будет. А пока мы только знакомимся...

21. Найдите пределы:

$$\text{(а)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}, \quad \text{(б)} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}, \quad \text{(в)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

22. В следующих двух примерах полезно заменить переменную и вспомнить школьные «формулы приведения»:

$$\text{(а)} \lim_{x\to \pi/4} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right), \qquad \text{(б)} \lim_{x\to 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

23. Посчитайте пределы «иррационально-тригонометрических» выражений:

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3},\quad \text{(б)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}.$$

24. Вот вам еще несколько симпатичных примеров:

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x},\quad \text{(б)}\ \lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg} x},$$

$$\text{(в)}\ \lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x},\qquad \text{(г)}\ \lim_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}.$$

25. Вычислите пределы выражений, содержащих логарифмические функции:

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to+\infty}x\,[\ln(x+1)-\ln x],\quad \text{(б)}\ \lim_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x].$$

26. Пусть $a>0$. Выясните, чему равны пределы

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x},\qquad \text{(б)}\ \lim_{x\to 1}\frac{x^a-1}{x-1},$$

$$\text{(в)}\ \lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a},\quad \text{(г)}\ \lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}.$$

27. Предполагая для простоты, что $\alpha>0$ и $\beta>0$, найдите предел

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha}x)\,(1-\sin^{\beta}x)}}.$$

А все-таки, что будет, если отказаться от условий на параметры?

Первые асимптотические формулы

28. Полагая, что $x\to 0$, перепешите знакомые вам предельные соотношения в виде следующих асимптотических формул:

(а) $e^x=1+x+o\,(x)$,
(б) $\sin x=x+o\,(x)$,
(в) $\cos x=1-x^2/2+o\,(x^2)$,
(г) $\ln(1+x)=x+o\,(x)$,
(д) $(1+x)^{\mu}=1+\mu\,x+o\,(x)$.

29. Пользуясь последней формулой предыдущей задачи, посчитайте пределы:

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x},\qquad \text{(б)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}.$$

30. Вот еще два примера, решение которых заметно упрощается, если воспользоваться асимптотическими формулами:

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2},\qquad \text{(б)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(n\,x+\sqrt[3]{1-nx}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}.$$

31. Найдите предел следующего устрашающего выражения

$$\frac{e^x\cos x-\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sin x}{\sqrt[3]{1+2x}-e^{\sin x}+\ln\cos\sqrt{x}}$$

при условии, что положительная переменная x стремится к нулю.

32. Посчитайте следующие две пары пределов, где переменная стремится к той или иной бесконечности:

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right),$$

$$\text{(б)}\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right),$$

Здесь необходимо проявить известную осторожность: квадратный корень из квадрата вещественного числа равен этому числу лишь в том случае, если оно положительно или равно нулю.

33. Некоторые считают, что масса m как функция скорости v выражается формулой

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

где m_0 и c означают некоторые постоянные. Докажите, что тогда

$$m=m_0+\frac{m_0v^2}{2c^2}+o\left(\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Проверьте это двумя способами: непосредственно и «по науке», опираясь на одну из уже известных вам асимптотических формул.

3. Правила дифференцирования

Первое знакомство с производной

1. (а) Скорость равномерного движения определяется как путь, пройденный за единицу времени. Дайте определение скорости неравномерного движения. (б) Угловая скорость равномерного вращения определяется как угол поворота за единицу времени. Дайте определение угловой скорости неравномерного вращения. (в) Сила постоянного тока определяется как количество электричества, протекающего через поперечное сечение проводника в единицу времени. Дайте определение силы переменного тока.

2. Полагая последовательно $\Delta x = 0,1;\ 0,01;\ 0,001;\ 0,0001$, найдите отношение $\Delta y/\Delta x$ и понаблюдайте за его изменением, если

$$\text{(а) } y = x^2,\ x = 1; \quad \text{(б) } y = 1/x,\ x = 2; \quad \text{(в) } y = \sqrt{x},\ x = 4.$$

Посчитайте предел указанного отношения при $\Delta x \to 0$ для каждой из трех функций y в произвольной точке x из области определения.

3. Обязана ли дифференцируемая функция быть непрерывной? Разумеется, вы правы — обязана. Верно ли обратное? Может ли непрерывная функция иметь бесконечную производную?

4. Постройте пример разрывной функции, всюду имеющей производную. Что вы можете сказать о производной в точке разрыва?

5. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема и имеет предел при $x \to +\infty$. Следует ли отсюда, что ее производная $f'(x)$ также имеет предел при $x \to +\infty$? Верно ли обратное утверждение?

6. Пусть при $x = x_0$ функции $f(x)$ и $g(x)$ равны нулю и дифференцируемы, причем $g'(x_0) \neq 0$. Докажите, что в таком случае

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

7. Докажите, что производная четной функции представляет собой нечетную функцию, а производная нечетной функции есть функция четная. В чем геометрический смысл этих утверждений?

8. Докажите, что при дифференцировании периодической функции получается снова периодическая функция с прежним периодом.

9. Пусть вам задан график функции $y = ax^2$. Научитесь при помощи циркуля и линейки проводить касательную к этому графику в любой отмеченной его точке.

10. Выясните, при каком значении переменной x касательные к графикам функций $y = x^2$ и $y = x^3$ параллельны.

11. Выясните, под каким углом пересекаются параболы $y = x^2$ и $x = y^2$. Тот же вопрос исследуйте для парабол $y = 2x^2$ и $x = 2y^2$. Обобщите ваши наблюдения.

12. Докажите, что два семейства гипербол

$$x^2 - y^2 = a \quad \text{и} \quad xy = b$$

образуют на плоскости ортогональную сеть в том смысле, что любые две гиперболы из разных семейств пересекаются под прямым углом. Грамотно нарисуйте эту сеть и полюбуйтесь ею — она красивая.

13. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема слева в точке $x = x_0$. Расширим ее до функции $g(x)$, полагая $g(x) = f(x)$ при $x \leq x_0$ и $g(x) = a + b(x - x_0)$ при $x > x_0$. Выясните, при каких значениях параметров a и b функция $g(x)$ будет не только непрерывной, но и дифференцируемой при $x = x_0$.

Производные элементарных функций

Выучите наизусть таблицу производных основных элементарных функций. Изучите и крепко-накрепко запомните общие правила дифференцирования. Решайте сотнями и сутками примеры на вычисление производных. Вы найдете их в изобилии в любом задачнике по анализу, но можете придумать и сами. Здесь мы приведем лишь несколько задач и упражнений, чтобы обозначить уровень, который вам необходимо преодолеть в результате ваших стараний.

14. Посчитайте производные многочленов:

(а) $(x^2+1)^4$; (б) $(1-x)^{20}$; (в) $(1+3x)^{30}$; (г) $(1-x^2)^{10}$.

15. Найдите компактные выражения для производных многочлена $(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-n)$ в точках $x = 1, 2, \ldots, n$. Найдите симпатичную формулу для производной в остальных точках.

16. Посчитайте производные рациональных функций:

$$\text{(а)}\ \frac{ax+b}{cx+d};\quad \text{(б)}\ \frac{x}{x^2+1};\quad \text{(в)}\ \frac{1-x^3}{1+x^3};\quad \text{(г)}\ \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2.$$

17. Продифференцируйте иррациональные выражения:

$$\text{(а)}\ \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}};\quad \text{(б)}\ \frac{1+x}{\sqrt{1-x}};\quad \text{(в)}\ \sqrt{\frac{x+1}{x-1}};\quad \text{(г)}\ \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}.$$

18. Для каждого натурального n определим функцию y_n, полагая

$$y_n = \sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}},$$

где корень извлекается n раз. Вычислите производные всех этих функций при $x=0$. Ваши рассуждения будут особенно элегантны, если вы, угадав ответ, примените метод математической индукции.

19. Посчитайте производные выражений, содержащих тригонометрические функции:

$$\text{(а)}\ \frac{x}{1-\cos x};\quad \text{(б)}\ \frac{x\,\sin x}{1+\cos x};\quad \text{(в)}\ \sqrt{1+2\operatorname{tg} x};\quad \text{(д)}\ \sin\sqrt{1+x^2}.$$

20. Посчитайте производные выражений, содержащих обратные тригонометрические функции:

$$\text{(а)}\ x\,\arcsin x+\sqrt{1-x^2};\quad \text{(б)}\ \operatorname{arctg}\left(x-\sqrt{1+x^2}\right);$$

$$\text{(в)}\ \arcsin\frac{\sin\alpha\,\sin x}{1-\cos\alpha\,\sin x};\quad \text{(г)}\ \arccos\frac{b+a\,\cos x}{a+b\,\cos x}.$$

21. Посчитайте производные выражений, содержащих логарифмические функции:

$$\text{(а)}\ x^2\log_3 x;\quad \text{(в)}\ \ln^2 x;\quad \text{(д)}\ \ln\sin x;$$

$$\text{(б)}\ x\,\lg x;\quad \text{(г)}\ \sqrt{\ln x};\quad \text{(е)}\ \ln\operatorname{tg} x.$$

22. Посчитайте производные выражений, содержащих показательные функции:

$$\text{(а) } xe^x; \qquad \text{(б) } e^x \cos x; \qquad \text{(в) } \sqrt{1+e^x};$$

$$\text{(г) } \sin(2^x); \qquad \text{(д) } 3^{\sin x}; \qquad \text{(е) } 2^{3^x};$$

$$\text{(ж) } e^{-a^2x^2}; \qquad \text{(з) } e^{-x^2/a^2}; \qquad \text{(и) } e^{-a^2/x^2}.$$

23. Посчитайте производные выражений, содержащих гиперболические функции:

$$\text{(а) } \ln \operatorname{ch} x; \quad \text{(в) } \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x; \quad \text{(д) } \sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}} = \sqrt[4]{\frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}};$$

$$\text{(б) } \operatorname{th} \ln x; \quad \text{(г) } \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x; \quad \text{(е) } \frac{1}{2} \operatorname{th} x + \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{1+\sqrt{2} \operatorname{th} x}{1-\sqrt{2} \operatorname{th} x}.$$

24. Применяя «логарифмическое дифференцирование», посчитайте производные следующих функций:

$$\text{(а) } x^x; \quad \text{(б) } x^{1/x}; \quad \text{(в) } x^{-1/x}; \quad \text{(г) } x^{\sqrt{x}}; \quad \text{(д) } x^{\ln x}; \quad \text{(е) } x^{\sin x}.$$

25. Вычислите производную функции

$$y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1}.$$

Убедившись, что производная строго больше нуля, объясните, как это можно согласовать с тем очевидным обстоятельством, что $y \to 0$, как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$.

26. Чтобы доставить себе удовольствие, продифференцируйте еще несколько «монстров»:

$$\text{(а) } y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{(б) } y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1};$$

$$\text{(в) } y = \ln \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

27. Научившись дифференцировать, найдите компактные формулы для сумм

$$\text{(а)} \sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}; \qquad \text{(в)} \sum_{k=1}^{n} k\,\sin kx; \qquad \text{(д)} \sum_{k=1}^{n} k\,\operatorname{sh} kx;$$

$$\text{(б)} \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1}; \qquad \text{(г)} \sum_{k=1}^{n} k\,\cos kx; \qquad \text{(е)} \sum_{k=1}^{n} k\,\operatorname{ch} kx.$$

Во всех этих примерах речь идет об элементарных свойствах геометрических прогрессий, а там, где участвуют тригонометрические функции, полезно обратиться к услугам комплексной арифметики.

28. Докажите тождество

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\left(x/2^n\right)}$$

и воспользуйтесь им для «вычисления» суммы

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}.$$

Интересно выяснить, куда стремятся рассмотренные здесь произведение и сумма, когда число сомножителей и слагаемых, равное n, неограниченно растет. Посчитайте эти пределы.

Повторное дифференцирование

29. Если точка движется вдоль оси, ее скорость может быть выражена одним числом — производной пути по времени. Как называют величину, характеризующую быстроту изменения скорости? Правильно — ускорением. Для его вычисления нужно продифференцировать скорость, или, иными словами, найти вторую производную пути по времени. Может ли случиться так, что скорость всегда остается положительной, а ускорение отрицательным? Может ли скорость возрастать при условии, что ускорение убывает? Может ли скорость убывать при положительном ускорении?

30. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема при $x \le x_0$. Распространим ее на всю числовую прямую, полагая $F(x) = f(x)$, если $x \le x_0$, и $F(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2$, если $x > x_0$. Выясните, при каких значениях параметров a, b и c функция $F(x)$

будет дважды дифференцируемой. Сколько решений имеет эта задача? Можно ли здесь с тем же успехом обойтись линейными функциями? При каких обстоятельствах дважды дифференцируемое линейное продолжение все же возможно?

31. А теперь немного посчитаем. Найдите y'', если:

(а) $y = x\sqrt{1+x^2}$; (в) $y = e^{-x^2}$; (д) $y = \sin f(x)$;

(б) $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$; (г) $y = x \ln x$; (е) $y = f(\sin x)$.

32. Найдите формулы для первой и второй производной экспоненты e^x в двух принципиально разных случаях: (а) когда перменная x независима; (б) когда x служит промежуточным агрументом.

33. Пусть u и v означают дважды дифференцируемые функции переменной x. Найдите вторые производные следующих функций:

(а) uv; (б) u/v; (в) ue^v; (г) $\ln\sqrt{u^2+v^2}$; (д) $\operatorname{arctg}(u/v)$.

34. Проверьте таблицу высших производных:

(а) если $y = e^x$, то $y^{(n)} = e^x$;

(б) если $y = \sin x$, то $y^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$;

(в) если $y = \cos x$, то $y^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$;

(г) если $y = x^\mu$, то $y^{(n)} = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)\,x^{\mu-n}$;

(д) если $y = \ln x$, то $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

35. Пусть $F(x) = f(ax+b)$, где a и b постоянны, а f означает n раз дифференцируемую функцию. Докажите, что тогда и функция F имеет все производные до порядка n включительно, причем

$$F^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

36. Пусть $h(x) = af(x) + bg(x)$, где a и b постоянны, а функции f и g дифференцируемы n раз. Докажите, что столько же раз можно дифференцировать и функцию h, причем

$$h^{(n)}(x) = af^{(n)}(x) + bg^{(n)}(x).$$

37. Докажите, что произведение n-кратно дифференцируемых функций u и v также имеет производную порядка n, и она может быть посчитана по формуле Лейбница:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

где $u^{(0)} = u,\ v^{(0)} = v$, а C_n^k означают знакомые вам биномиальные коэффициенты. Хорошо бы найти объяснение столь поразительному сходству этого замечательного соотношения с формулой Ньютона.

38. Найдите выражения для производных сотого порядка следующих функций:

(а) $(x-1)(2x-1)\dots(100x-1)$; (в) $\dfrac{x^2}{1-x}$; (д) $x \operatorname{sh} x$;

(б) $(2-x)(3-2x)\dots(100-99x)$; (г) $\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$; (е) $x \operatorname{ch} x$.

39. Найдите производные порядка n рациональных функций:

(а) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$; (б) $\dfrac{1}{x(1-x)}$; (в) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

40. Посчитайте и представьте в компактной форме тысячные производные при $x=0$ следующих двух иррациональных функций:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{1+3x}}.$$

41. Найдите выражения для производных произвольного порядка следующих трансцендентных функций:

(а) $\sin^2 x$; (б) $\cos^2 x$; (в) $e^x \sin x$; (г) $e^x \cos x$.

42. Вычислите производные всех порядков функции $y = \operatorname{arctg} x$ в точке $x=0$, воспользовавшись для этого формулой Лейбница и соотношением $(1+x^2)\,y' \equiv 1$. Решите аналогичную задачу для функций $y = \arccos x$ и $y = (\arcsin x)^2$.

43. Докажите две любопытные формулы:

$$\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\,e^{1/x}; \qquad (x^n \ln x)^{(n)} = n!\left(\ln x + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right).$$

44. Постройте пример функции, которая всюду дифференцируема n раз, но в заданной точке не имеет производной порядка $n+1$.

45. Постройте бесконечно дифференцируемую строго возрастающую функцию, у которой в заданной точке производные всех порядков равны нулю.

Разные способы задания функций

Если функция $y = f\,(x)$ дифференцируема в каждой точке x некоторого промежутка, причем ее производная всюду отлична от нуля, то существует однозначная обратная функция $x = f^{-1}(y)$, также определенная на некотором промежутке и дифференцируемая в каждой его точке y. При этом

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Как показывает эта формула, если производная f' дифференцируема, т. е. исходная функция f дифференцируема дважды, то и обратная функция f^{-1} имеет вторую производную:

$$(f^{-1})''(y) = -\frac{f''(f^{-1}(y))}{(f'(f^{-1}(y)))^3}.$$

46. Считая функцию f трижды дифференцируемой, докажите, что обратная функция f^{-1} также трех-кратно дифференцируема, и найдите выражение для ее третьей производной.

Эти рассуждения и вычисления можно продолжать и дальше, но очень скоро формулы станут настолько громоздкими, что трудно будет не сделать ошибки. Чтобы не тратить времени даром, освоим «классическую» систему обозначений, которую отличают две характерные черты: она вопиюще некорректна, но исключительно удобна.

Будем считать, что переменная y есть функция переменной x, а переменная x, в свою очередь, есть обратная функция от y. Договоримся, что y', y'' и т. д. будут означать производные y по x, а символами x', x'' и т. д. мы обозначим производные x по y. Наконец, будем помнить, что в каждом соотношении, где участвуют одновременно производные переменных y и x, они обязательно вычисляются в точках x и y, связанных изучаемой зависимостью. В этом смысле мы имеем тождество $x'\,y' = 1$. Дифференцируя его по переменной y и пользуясь «цепным» правилом $(y')'_y = (y')'_x\,x'_y = y''x'$, мы приходим к новому тождеству

$$x''y' + (x')^2y'' = 0,$$

из которого легко находим x''. Дальнейшие шаги столь же просты:

$$x'''y' + 3x''x'y'' + (x')^3y''' = 0,$$

и так до бесконечности...

47. Попробуйте подобным же образом подифференцировать соотношение $x'\,y' = 1$ по переменной x, пользуясь цепным правилом $(x')'_x = (x')'_y\,y'_x = x''y'$. Совпадают ли новые тождества с прежними? По каким же формулам, все-таки, нужно выражать искомые производные функции x через заданные производные функции y?

48. Пусть пятикратно дифференцируемая функция $f(x)$ взаимно однозначна, $f(x_0) = y_0$ и $f^{(k)}(x_0) = k$, где $1 \le k \le 5$. Найдите первые пять производных функции $f^{-1}(y)$ при $y = y_0$.

49. (а) Как нетрудно убедиться, существует единственная функция $y = y\,(x)$, определенная для всех значений переменной x и удовлетворяющая уравнению Кеплера

$$y - \varepsilon\,\sin y = x, \quad \text{где} \quad 0 \le \varepsilon < 1.$$

Докажите, что эта функция бесконечно дифференцируема. Найдите ее производные при $x = 0$ до пятого порядка включительно.

(б) Выполните аналогичное задание для уравнения $y^3 + 3y = x$.

Рассмотрим две функции $x = \varphi\,(t)$ и $y = \psi\,(t)$, определенные для всех значений параметра t из некоторого промежутка. Предположим, что первая из них взаимно однозначна, так что можно выразить t через x по формуле $t = \varphi^{-1}(x)$, а тогда y становится функцией от x, а именно: $y = f\,(x)$, где $f\,(x) = \psi\,(\varphi^{-1}(x))$. В таком случае говорят, что функция f задана *параметрически*.

Предположим теперь, что обе параметризующие функции дифференцируемы, причем $\varphi'(t) \neq 0$ для всех t. Как мы уже знаем, в таком случае обратная функция $\varphi^{-1}(x)$ определена на некотором промежутке и дифференцируема в каждой его точке. Сочетая известную нам формулу для производной обратной функции с правилом дифференцирования сложной функции, мы приходим к следующему соотношению:

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

где значение параметра t однозначно определяется точкой x по формуле $t = \varphi^{-1}(x)$. Если держать в уме все отмеченные здесь обстоятельства и понимать смысл происходящего, то можно позволить себе облегчить обозначения, поднявшись до классической простоты:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Заметим, что это равенство, вместе с формулой $x = \varphi(t)$, показывает нам, что y'_x как функция от x тоже задана параметрически. Поэтому, если разрешает гладкость параметризующих функций, мы можем дифференцировать дальше. А именно, снова применяя цепное правило $(y'_t/x'_t)'_x = (y'_t/x'_t)'_t\, t'_x$, где $t'_x = 1/x'_t$, мы приходим к формуле для второй производной:

$$y''_x = \frac{y''_t\, x'_t - y'_t\, x''_t}{(x'_t)^3}.$$

50. Считая, что параметризующие функции трижды дифференцируемы, найдите формулу для третьей производной параметрически заданной функции.

51. Дважды дифференцируемая функция $y = f(x)$ задана в окрестности точки $x = 0$ параметрически:

$$x = t^3 - t^2, \quad y = -t^3 + 3t - 1.$$

Найдите $f'(0)$ и $f''(0)$, если $f(0) = 1$.

52. Посчитайте производные y'_x, y''_x, y'''_x, выразив их через t, если

(а) $x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3;$
(б) $x = \cos t, \quad y = \sin t;$
(в) $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t.$

53. Пусть $x = t^2 - t + 1$ и $y = t^2 + t + 1$, причем $y = 3$ при $x = 1$. Найдите все производные функции y по переменной x в точке $x = 1$.

Пусть $y = y\,(x)$ означает функцию, определенную и дифференцируемую в каждой точке x некоторого промежутка и удовлетворяющую на нем уравнению $F\,(x, y) = 0$ в том смысле, что в пределах упомянутого промежутка выражение $F\,(x, y\,(x))$ тождественно равно нулю. Если нам известно к тому же, что $y = y_0$ при $x = x_0$, то в подавляющем числе случаев мы можем найти производную этой «неявно» заданной функции $y = y\,(x)$ в точке $x = x_0$. А именно, если продифференцировать тождество $F\,(x, y\,(x)) \equiv 0$ по переменной x, как правило, мы получим соотношение вида

$$F_1\,(x, y) + F_2\,(x, y)\,y' \equiv 0.$$

Отсюда, если предположить, что $F_2\,(x_0, y_0) \neq 0$, мы находим нужную нам производную:

$$y'(x_0) = -\frac{F_1\,(x_0, y_0)}{F_2\,(x_0, y_0)}.$$

Дифференцируя дальше, если это возможно, мы придем к следующему тождеству:

$$F_{11}\,(x, y) + F_{12}\,(x, y)\,y' + (F_{21}\,(x, y) + F_{22}\,(x, y)\,y')\,y' + F_2\,(x, y)\,y'' \equiv 0.$$

Отсюда, при том же условии $F_2\,(x_0, y_0) \neq 0$, находим $y''(x_0)$ и т. д.

54. Трижды дифференцируемая функция $y = f(x)$ удовлетворяет условию $f(1) = 2$ и уравнению $F\,(x, y) = 0$. Найдите производные $f'(1), f''(1)$ и $f'''(1)$, если

(а) $F\,(x, y) = y^3 + x^3 + 2xy - y^2 + x - 10;$
(б) $F\,(x, y) = y^5 - 2y^3 - 4y - x - 7;$
(в) $F\,(x, y) = \cos\,(y^2 - 4) + \sin\,(\ln x) - y + x.$

55. Пусть переменные x и y связаны одним из трех условий:

(а) $y = \sqrt{25 - x^2},\ |x| < 5;$
(б) $x = 5\cos t,\ y = 5\sin t,\ 0 < t < \pi;$
(в) $x^2 + y^2 = 25,\ y > 0.$

Убедитесь, что во всех случаях получается одна и та же бесконечно дифференцируемая функция y переменной x. Найдите первые три ее прозводные при $x = 3$ и $x = 4$, пользуясь разными способами дифференцирования. В каком случае вычисления проще?

Вектор-функции скалярного аргумента

Отображение, у которого областью определения служит какой-либо интервал числовой прямой, а значениями являются векторы трехмерного евклидова пространства, называют *вектор-функцией скалярного аргумента.* Если все эти «векторные» значения принадлежат одной плоскости, вектор-функцию называют *плоской.* Выберем произвольно три линейно независимых вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Они, как вы знаете, образуют базис трехмерного пространства, а значит, каждая вектор-функция $\vec{a}\,(t)$ может быть записана в виде линейной комбинации этих трех векторов:

$$\vec{a}\,(t) = a_1\,(t)\,\vec{e}_1 + a_2\,(t)\,\vec{e}_2 + a_3\,(t)\,\vec{e}_3,$$

где коэффициенты $a_i(t)$ представляют собой числовые функции. Если отложить все векторы $\vec{a}\,(t)$ от некоторой общей точки, их концы опишут определенную линию. Ее называют *годографом* вектор-функции $\vec{a}\,(t)$. Впрочем, «линия» — далеко не всегда линия...

56. Нарисуйте годограф вектор-функции $\vec{a}\,(t)$, если:

(а) $\vec{a}\,(t) = t\,\vec{e}_1 + t^2\,\vec{e}_2$;
(б) $\vec{a}\,(t) = \cos t\,\vec{e}_1 + \sin t\,\vec{e}_2$;
(в) $\vec{a}\,(t) = \operatorname{ch} t\,\vec{e}_1 + \operatorname{sh} t\,\vec{e}_2$;
(г) $\vec{a}\,(t) = \cos t\,\vec{e}_1 + \sin t\,\vec{e}_2 + t\,\vec{e}_3$.

Вектор $\vec{a}_0$ называют *пределом* вектор-функции $\vec{a}\,(t)$ в точке $t = t_0$, если при $t \to t_0$ длина вектора $\vec{a}\,(t) - \vec{a}_0$ стремится к нулю. В этом случае пишут

$$\vec{a}_0 = \lim_{t \to t_0} \vec{a}\,(t) \quad \text{или} \quad \vec{a}(t) \to a_0 \quad \text{при} \quad t \to t_0.$$

57. Докажите, что вектор $\vec{a}_0$ служит пределом вектор-функции $\vec{a}\,(t)$ при $t \to t_0$ тогда и только тогда, когда координаты вектора $\vec{a}\,(t)$ относительно какого-либо базиса при $t \to t_0$ стремятся к соответствующим координатам вектора $\vec{a}_0$.

58. Пусть $\vec{a}\,(t) \to \vec{a}_0$ при $t \to t_0$. Докажите, что в таком случае и $|\vec{a}\,(t)| \to |\vec{a}_0|$ при $t \to t_0$. Верно ли обратное? А если вектор $\vec{a}_0$ равен нулю? Что в случае $\vec{a}_0 \neq 0$ нужно добавить к условию сходимости длин, чтобы можно было гарантировать сходимость самих векторов?

59. Пусть при $t \to t_0$ вектор-функции $\vec{a}\,(t)$ и $\vec{b}\,(t)$ стремятся соответственно к векторам $\vec{a}_0$ и $\vec{b}_0$, а числовые функции $\lambda\,(t)$ и $\mu\,(t)$ имеют конечные пределы λ_0 и μ_0. Докажите, что тогда

$$\lim_{t_0} (\lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}) = \lambda_0\,\vec{a}_0 + \mu_0\,\vec{b}_0.$$

$$\lim_{t_0} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0; \quad \lim_{t_0} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}_0 \times \vec{b}_0.$$

Вектор-функцию $\vec{a}\,(t)$ считают *непрерывной* в точке $t = t_0$, если она определена при указанном значении параметра и

$$\vec{a}\,(t_0) = \lim_{t \to t_0} \vec{a}\,(t).$$

60. Сформулируйте аналоги утверждений предыдущих трех задач, относящиеся к понятию непрерывности вектор-функции скалярного аргумента, и докажите их.

Говорят, что вектор-функция $\vec{a}\,(t)$ *дифференцируема* в точке t, если существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}\,(t + \Delta t) - \vec{a}\,(t)}{\Delta t},$$

который, как и в скалярном случае, называют *производной* и обозначают символом $\vec{a}\,'(t)$. Обычно, — например, в механике, да и в геометрии тоже, — параметр t интерпретируют как время, и тогда, вслед за Ньютоном, производную обозначают символом $\dot{\vec{a}}\,(t)$.

61. Докажите, что дифференцируемая вектор-функция непременно непрерывна. Приведите пример вектор-функции, непрерывной, но не имеющей производной в заданной точке.

62. Докажите, что вектор-функция дифференцируема тогда и только тогда, когда дифференцируемы ее координаты в том или ином базисе. При этом координаты ее производной равны производным координат.

Пусть $\vec{a}(t_0)$ служит радиус-вектором точки $M(t_0)$. Предположим, что $\vec{a}\,'(t_0) \neq 0$. Прямую линию, проходящую через точку $M(t_0)$ и направленную вдоль вектора $\vec{a}\,'(t_0)$, естественно назвать *касательной* к годографу вектор функции $\vec{a}(t)$ в его точке $M(t_0)$.

63. Найдите производные вектор-функций $\vec{a}\,(t)$, указанных в задаче 1. Посчитайте их значения при $t = 0$. Для соответствующих этому значению параметра точек годографов составьте уравнения касательных к ним.

64. Вектор-функции, как и векторы, можно складывать и вычитать, их можно умножать и делить на скалярные функции, а кроме того, в них можно заменять переменную новым скалярным параметром. Сформулируйте и докажите правила дифференцирования вектор-функций, соответствующие указанным операциям. Эти правила точно такие же, как их скалярные версии.

65. В дополнение к предыдущей задаче, докажите, что скалярное и векторное произведения дифференцируемых вектор-функций $\vec{a}$ и $\vec{b}$ также дифференцируемы, причем

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})' = \vec{a}\,'\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{b}\,', \qquad (\vec{a}\times\vec{b})' = \vec{a}\,'\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b}\,'.$$

Приведите два доказательства этих утверждений: «инвариантное», опирающееся на свойства операций скалярного и векторного умножений, и «координатное», использующее координатные выражения обсуждаемых операций. Найдите и докажите формулы дифференцирования смешанного и двойного векторного произведений переменных векторов.

66. Пусть переменный дифференцируемый вектор $\vec{a}(t)$ не меняет своей длины. Докажите, что в каждый момент t векторы $\vec{a}(t)$ и $\vec{a}\,'(t)$ ортогональны. Дайте этому геометрическое объяснение.

67. Как вы думаете, распространяется ли на вектор-функции теорема Лагранжа о конечных приращениях обычной, скалярной, дифференцируемой функции? В качестве примера возьмите *винтовую линию*, которую вы, скорее всего, так и назвали, когда встретились с ней, решая задачу 56(г).

68. Пусть вектор-функция $\vec{a}\,(t)$ непрерывна на отрезке $t_1 \le t \le t_2$ и в каждой его внутренней точке имеет производную, удовлетворяющую неравенству $|\vec{a}\,'(t)| \le M$, где постоянная M не зависит от t. Докажите, что в таком случае

$$|\vec{a}\,(t_2) - \vec{a}\,(t_1)| \le M\,(t_2 - t_1).$$

С этой целью полезно предварительно изучить приращение скалярной функции $\vec{a}\,(t) \cdot \vec{c}$, взяв в качестве $\vec{c}$ произвольный вектор и применив теорему Лагранжа, а затем положить $\vec{c} = \vec{a}\,(t_2) - \vec{a}\,(t_1)$.

69. Докажите, что вектор-функция постоянна, если ее производная тождественно равна нулю. Учитывая это очевидное утверждение, опишите все дифференцируемые вектор-функции $\vec{a}\,(t)$, у которых производная $\vec{a}\,'(t)$ в каждый момент отлична от нуля и

(а) постоянна;
(б) коллинеарна вектору $\vec{a}\,(t)$;
(в) ортогональна вектору $\vec{a}\,(t)$.

70. Куб вращается вокруг одной из своих вершин O, которая остается неподвижной. Рассмотрим три вектора, идущие по ребрам куба из точки O в соседние вершины. Докажите, что скорости этих векторов в каждый момент компланарны. Верно ли это для произвольного «косоугольного» параллелепипеда?

Дифференциалом вектор-функции $\vec{a} = \vec{a}\,(t)$ в точке t называют линейную форму

$$d\vec{a} = \vec{a}\,'(t)\,dt.$$

Эта форма представляет собой *функцию*, действующую по правилу $d\vec{a}(\Delta t) = \vec{a}\,'(t)\Delta t$ на каждое число Δt. Поскольку $dt(\Delta t) = \Delta t$, производная, как и для обычных функций, может быть выражена в виде отношения дифференциалов:

$$\vec{a}\,'(t) = \frac{d\vec{a}}{dt}.$$

В чем смысл дифференциала? Рассмотрим приращение

$$\Delta\vec{a} = \vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)$$

дифференцируемой вектор-функции $\vec{a}(t)$, соответствующее приращению Δt ее аргумента t. Тогда, как легко понять,

$$\Delta\vec{a} = \vec{a}\,'(t)\Delta t + \vec{o}(\Delta t).$$

Здесь символ $\vec{o}(\Delta t)$ означает вектор-функцию пермененной Δt, которая бесконечна мала не только сама по себе, на даже по сравнению с Δt, а именно:

$$\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta t \to 0.$$

Таким образом, дифференциал $d\vec{a}$ вычисляет *линейную часть* приращения вектор-функции $\vec{a}(t)$. Если $\vec{a}\,'(t) \neq 0$, то это, на самом деле, — *главная часть* приращения, а годограф дифференциала в таком случае представляет собой прямую линию, которая совпадет с касательной прямой, если ее перенести в соответствующую точку годографа изучаемой вектор-функции.

71. Докажите только что высказанные утверждения об аналитических и геометрических свойствах дифференциала. Дайте ему и механическую интерпретацию.

Вторые и все следующие производные и дифференциалы вектор-функции определяются и обозначаются точно так же, как и в скалярном случае. Например, вторая производная $\vec{a}\,''(t) = \ddot{\vec{a}}\,(t)$ вектор-функции $\vec{a}\,(t)$ есть результат дифференцирования первой производной $\vec{a}\,'(t) = \dot{\vec{a}}\,(t)$, а дифференциалом второго порядка нашей функции служит квадратичная форма

$$d^2\vec{a} = \vec{a}\,''(t)\,dt^2 = \ddot{\vec{a}}\,(t)\,dt^2,$$

представляющая собой функцию от приращения аргумента, принимающую векторные значения. Отсюда

$$\vec{a}\,''(t) = \ddot{\vec{a}}\,(t) = \frac{d^2\vec{a}}{dt^2}.$$

72. Опишите все дважды дифференцируемые вектор-функции, у которых вторая производная всегда (а) равна нулю; (б) постоянна. Как в механике называют движения, описываемые такими вектор-функциями? Приведите формулы этих движений.

73. Докажите, опираясь на скалярный вариант формулы Тейлора, что приращение $\Delta\vec{a}$ дважды диференцируемой векторной функции $\vec{a}(t)$ следующей асимптотической формулой:

$$\Delta\vec{a} = \vec{a}\,'(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}\,''(t)\Delta t^2 + \vec{o}(\Delta t^2).$$

Аналогично, если вектор-функция трижды дифференцируема, то

$$\Delta\vec{a} = \vec{a}\,'(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}\,''(t)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\vec{a}\,'''(t)\Delta t^3 + \vec{o}(\Delta t^3).$$

Здесь мы — для красоты и выразительности формул — позволяем себе ставить скаляр после вектора при их умножении, а кроме того, экономя скобки, пишем Δt^n, имея в виду не приращение степени переменной t, но степень ее приращения...

На плоскости с прямоугольными декартовыми роординатами (x, y) введем еще полярные координаты (r, φ), так что

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Полярный радиус r однозначно определяется условием $r \geq 0$. Что же касается *полярного угла* φ, то при $r = 0$ он вообще никак не определен в том смысле, что любой угол годится, а при $r > 0$ определен только с точностью до слагаемого, кратного 2π. Поэтому следующую задачу вряд ли стоит считать совсем уж тривиальной.

74. Рассмотрим на плоскости непрерывное движение, определяемое уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, не проходящее через начало координат. Для какого-нибудь момента t_0 выберем полярные координаты r_0 и φ_0 точки с координатами $x(t_0)$ и $y(t_0)$. Докажите или, хотя бы, убедитесь, т. е. *убедите себя* в том, что существует единственная пара непрерывных функций $r = r(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$, удовлетворяющая соотношениям

$$x(t) = r(t)\cos\varphi(t), \qquad y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$$

и «начальным условиям» $r(t_0) = r_0$, $\varphi(t_0) = \varphi_0$. Покажите, что степень гладкости движения наследуется функциями $r(t)$ и $\varphi(t)$.

Пусть $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ означают орты, соответствующие осям x и y. Это ортогональные между собой векторы единичной длины. С каждой точкой плоскости, отличной от начала координат, свяжем еще два орта $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\varphi$, из которых первый направлен вдоль радиуса-вектора точки, а второй ортогонален ему и составляет с ним положительный базис, т. е. ориентированный, как пара $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

75. Докажите, что в точке с полярными координатами (r, φ) только что описанные векторы определяются формулами:

$$\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2, \quad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2.$$

76. Предположим, что полярный угол $\varphi = \varphi(t)$ дифференцируемо зависит от переменной t. Интересно и важно выяснить, как меняются

при этом векторы $\vec{e}_r = \vec{e}_r(t)$ и $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(t)$. Докажите, что

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \quad \text{и} \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r.$$

77. Пусть движение точки на плоскости описывается отличной от нуля дважды дифференцируемой вектор-функцией $\vec{r}$. Докажите, что скорость точки $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ и ее ускорение $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$ могут быть вычислены по формулам

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi,$$

где $v_r = \dot{r},\ v_\varphi = r\dot{\varphi}$, и соответственно

$$\vec{a} = (\dot{v}_r - \dot{\varphi}v_\varphi)\,\vec{e}_r + (\dot{v}_\varphi + \dot{\varphi}v_r)\,\vec{e}_\varphi.$$

78. Представим себе, что в каждой точке некоторой пространственной области указан вектор $\vec{F}$. В таком случае говорят, что в области задано векторное поле. Будем понимать вектор $\vec{F}$ как силу, которая действует на материальную точку, когда она находится в том месте, где закреплен этот вектор. Если наша точка имеет массу m, то ее радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$, согласно Ньютону, меняется с течением времени t в соответствии с уравнением $m\ddot{\vec{r}} = F$. Докажите, что при этом в каждый момент

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\,\dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

79. Силовое поле назовем центральным относительно точки O, если в каждой точке рассматриваемой области оно направлено вдоль линии, проходящей через «центр» O и данную точку. Какие поля, известные вам из школьного курса физики, относятся к описанному классу? Докажите, что траектория материальной точки, движущейся в центральном поле, целиком располагается в пределах некоторой плоскости, проходящей через центр силы.

80. Если $\vec{r}$ означает радиус-вектор движущейся точки, то половину от $|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}|$ называют *секториальной скоростью* движения. Как вы думаете, почему? Иными словами, выясните геометрический смысл этой величины. Докажите, что движение в центральном поле всегда происходит с постоянной секториальной скоростью.

4. Методы интегрирования

Таблица неопределенных интегралов

1. Проверьте и запомните предлагаемую ниже небольшую табличку простейших неопределенных интегралов:

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C; \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + C; \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

Для каждой из этих формул укажите все промежутки, на которых она действует.

2. Дополните предыдущую таблицу следующими часто встречающимися интегралами:

$$\text{(а)} \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C;$$

$$\text{(б)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C.$$

Здесь ваша задача сводится к простому дифференцированию указанных равенств. В дальнейшем вы узнаете, как можно было получить эти формулы, не зная ответа заранее.

3. К «табличным» обычно относят еще интегралы от гиперболических функций:

$$\text{(а)} \int \operatorname{sh} x\,dx; \quad \text{(б)} \int \operatorname{ch} x\,dx; \quad \text{(в)} \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}; \quad \text{(г)} \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Вспоминая формулы для производных гиперболических функций, вы легко угадаете, чему равны эти интегралы.

Линейные преобразования переменной

4. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $\alpha < x < \beta$ и обладает на нем первообразной $F(x)$. Докажите, что для любых постоянных a и b функция $f(ax+b)$ также определена на некотором интервале, опишите его и убедитесь, что на нем

$$\int f(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$

если, разумеется, $a \neq 0$. Исследуйте вопрос и для $a = 0$.

5. Применяя формулу, указанную в предыдущей задаче, посчитайте следующие интегралы, сведя их к табличным:

$$\text{(а)} \int (2x-3)^{10}\,dx; \qquad \text{(б)} \int (2-3x)^{10}\,dx;$$

$$\text{(в)} \int \sqrt[3]{2-3x}; \qquad \text{(г)} \int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}.$$

6. Действуя так же, вычислите еще несколько интегралов:

$$\text{(а)} \int \frac{dx}{2x-3}; \quad \text{(в)} \int \frac{dx}{2+3x^2}; \quad \text{(д)} \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}};$$

$$\text{(б)} \int \frac{dx}{2-3x}; \quad \text{(г)} \int \frac{dx}{2-3x^2}; \quad \text{(е)} \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-3}}.$$

7. Посчитайте интегралы от «рационально-тригонометрических» функций:

$$\text{(а)} \int \frac{dx}{1+\cos x}; \quad \text{(б)} \int \frac{dx}{1-\cos x}; \quad \text{(в)} \int \frac{dx}{1+\sin x}; \quad \text{(г)} \int \frac{dx}{1-\sin x}.$$

Разложение подынтегральных выражений

8. В основе так называемого «метода разложения» лежит свойство линейности неопределенного интеграла. Опираясь на него, сведите следующие интегралы к табличным и вычислите их:

$$\text{(а)} \int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx; \quad \text{(б)} \int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx; \quad \text{(в)} \int \frac{(1-x)^3}{x\,\sqrt[3]{x}}.$$

9. Применяя тот же метод, найдите интегралы от рациональных функций:

$$\text{(а)} \int \frac{x^2\,dx}{1+x^2}; \quad \text{(б)} \int \frac{x^2\,dx}{1-x^2}; \quad \text{(в)} \int \frac{x^2+3}{1+x^2}\,dx; \quad \text{(г)} \int \frac{x^2+3}{1-x^2}\,dx.$$

10. То же самое задание выполните для следующих двух интегралов от иррациональных функций:

$$\text{(а)} \int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \quad \text{(б)} \int \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx.$$

11. Применяя метод разложения, сведите интеграл 2 (а) к более простым табличным интегралам и еще раз получите ответ.

12. Метод разложения в сочетании с линейной заменой переменной позволяет легко посчитать интегралы

$$\text{(а)} \int x\,(1-2x)^{10}\,dx; \qquad \text{(б)} \int \frac{x^2}{(1-x)^{10}}\,dx;$$

$$\text{(в)} \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}; \qquad \text{(г)} \int x\sqrt{2-3x}\,dx.$$

13. Для вычисления следующих интегралов полезно применить хотя и совсем маленькие, но все же хитрости:

$$\text{(а)} \int \operatorname{tg}^2 x\,dx; \quad \text{(б)} \int \operatorname{ctg}^2 x\,dx; \quad \text{(в)} \int \operatorname{th}^2 x\,dx; \quad \text{(г)} \int \operatorname{cth}^2 x\,dx.$$

14. Вот еще несколько интегралов на ту же тему:

$$\text{(а)} \int \sin^4 x\,dx; \quad \text{(б)} \int \cos^4 x\,dx; \quad \text{(в)} \int \frac{dx}{\cos^2 x\,\sin^2 x};$$

$$\text{(г)} \int \operatorname{sh}^4 x\,dx; \quad \text{(д)} \int \operatorname{ch}^4 x\,dx; \quad \text{(е)} \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x\,\operatorname{sh}^2 x}.$$

Дифференциал под знаком интеграла

Задача «явного» вычисления неопределенного интеграла по существу сводится к тому, чтобы в подынтегральном выражении $f\,(x)\,dx$

угадать дифференциал некоторой функции $F(x)$. В самом деле, если $f(x)\,dx = dF(x)$, то

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad \text{или} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

15. Путем надлежащего преобразования подынтегральных выражений сведите следующие интегралы от рациональных функций к табличным и посчитайте их до конца:

$$\text{(а)} \int \frac{x\,dx}{3-2x^2}; \quad \text{(б)} \int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}; \quad \text{(в)} \int \frac{x\,dx}{1+x^4}; \quad \text{(г)} \int \frac{x^3\,dx}{x^8-2}.$$

16. То же самое задание выполните для следующих иррациональных функций:

$$\text{(а)} \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}; \qquad \text{(б)} \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}};$$

$$\text{(в)} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}; \qquad \text{(г)} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

17. Посчитайте несколько простых интегралов с участием показательных и логарифмических функций:

$$\text{(а)} \int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}; \quad \text{(б)} \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}; \quad \text{(г)} \int \frac{\ln^2 x\,dx}{x}; \quad \text{(д)} \int \frac{dx}{x\ln x}.$$

18. Нашу тему продолжают интегралы от тригонометрических функций:

$$\text{(а)} \int \operatorname{tg} x\,dx; \quad \text{(б)} \int \operatorname{ctg} x\,dx; \quad \text{(в)} \int \frac{dx}{\sin x}; \quad \text{(г)} \int \frac{dx}{\cos x}.$$

19. Следующие интегралы от гиперболических функций вполне аналогичны предыдущим:

$$\text{(а)} \int \operatorname{th} x\,dx; \quad \text{(б)} \int \operatorname{cth} x\,dx; \quad \text{(в)} \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}; \quad \text{(г)} \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x};$$

20. Прежде чем мы перейдем к следующему вопросу, доставьте себе удовольствие вычислением еще двух симпатичных интегралов:

$$\text{(а)} \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\, dx; \qquad \text{(б)} \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}.$$

С большим сожалением, но приходится смириться с тем, что невозможно решить все задачки подобного рода, хотя бы потому, что им просто нет конца.

Метод замены переменной

Зная первообразную $F(x)$ той или иной функции $f(x)$, мы легко можем составить с ее помощью бесконечную таблицу новых интегралов. А именно, подставляя вместо x какую угодно дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, мы получим «сложную» функцию $F(\varphi(t))$, у которой производная по переменной t равна

$$\frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\, \varphi'(t) = f(\varphi(t))\, \varphi'(t).$$

Это значит, что функция $F(\varphi(t))$ служит первообразной для функции $f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$, или, иными «словами»,

$$\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t)) + C.$$

На этом пути действительно можно найти немало интересных интегралов, и классики не пренебрегали такой возможностью. Но более актуальной обычно бывает обратная задача: мы не знаем интеграла функции $f(x)$, но хотим его найти. Метод замены переменной заключается в том, чтобы подыскать такую удачную подстановку $x = \varphi(t)$, для которой удалось бы вычислить интеграл

$$\int f(\varphi(t))\, d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \Phi(t) + C.$$

Тогда, если существует обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$ и она дифференцируема, нам остается подставить последнее выражение в функцию $\Phi(t)$. В результате, как легко убедиться прямым дифференцированием, мы получим искомую первоообразную функции $f(x)$. Таким образом,

$$\int f(x)\, dx = \Phi(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

21. Применяя подходящие подстановки, посчитайте следующие интегралы:

$$\text{(а)} \int x^3\,(1-5x^2)^{10}\,dx; \quad \text{(б)} \int x^5\,(2-5x^3)^{2/3}\,dx;$$

$$\text{(в)} \int \cos^5 x\,\sqrt{\sin x}\,dx; \qquad \text{(г)} \int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx;$$

$$\text{(д)} \int \frac{\ln x\,dx}{x\,\sqrt{1+\ln x}}; \qquad \text{(е)} \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

22. Применяя тригонометрические подстановки, вычислите заново третий и четвертый интегралы из первой задачи. Найдите также следующие интегралы:

$$\text{(а)} \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}; \qquad \text{(б)} \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-2}}; \qquad \text{(в)} \int \sqrt{1-x^2}\,dx;$$

$$\text{(г)} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}; \quad \text{(д)} \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx; \quad \text{(е)} \int x\,\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx.$$

Параметр a в последних трех примерах считается положительным.

23. Полагая $x-a=(b-a)\,\sin^2 t$, посчитайте интегралы:

$$\text{(а)} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)\,(b-x)}}; \quad \text{(б)} \int \sqrt{(x-a)\,(b-x)}\,dx.$$

24. Применяя гиперболические подстановки, вычислите заново интеграл 2 (б). Считая, что $a>0$, найдите также следующие три интеграла:

$$\text{(а)} \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx; \quad \text{(б)} \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx; \quad \text{(в)} \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx.$$

25. Полагая $x+a=(b-a)\,\mathrm{sh}^2\, t$, посчитайте интегралы:

$$\text{(а)} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)\,(x+b)}}; \quad \text{(б)} \int \sqrt{(x+a)\,(x+b)}\,dx.$$

Невозможно не сравнить их с интегралами из задачи 23.

Метод интегрирования по частям

Если функции $u = u\,(x)$ и $v = v\,(x)$ дифференцируемы, мы полагаем для краткости

$$\int u\,dv := \int u\,(x)\,v'(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int v\,du := \int v\,(x)\,u'(x)\,dx.$$

Как показывает теорема о дифференцировании произведения функций, если один из этих интегралов существует, то обязательно существует и другой из них, причем

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Это соотношение называют формулой интегрирования по частям. Она позволяет при вычислении интеграла заменить его другим, который нередко оказывается более простым.

Дифференциальное выражение $f\,(x)\,dx$ почти никогда изначально не бывает заданным в виде $u\,(x)\,dv\,(x) = u\,(x)\,v'(x)\,dx$, и задача каждый раз состоит в том, чтобы удачно разложить функцию $f\,(x)$ в произведение $u\,(x)\,w\,(x)$ и для множителя $w\,(x)$ найти первообразную $v\,(x)$, или, иными словами, вычислить интеграл:

$$v = \int w\,(x)\,dx.$$

Теперь, когда проинтегрирована «часть» $w\,(x)$ функции $f\,(x)$, мы получаем нужное нам представление $f\,(x)\,dx = u\,(x)\,dv\,(x)$, приводящее нашу задачу к интегрированию выражения $v\,(x)\,u'(x)\,dx$.

26. Применяя описанный выше метод интегрирования по частям, найдите интегралы:

$$\text{(а)} \int \ln\, dx; \qquad \text{(б)} \int \arcsin x\,dx; \qquad \text{(в)} \int \operatorname{arctg} x\,dx.$$

27. Вот еще несколько примеров на ту же тему:

$$\text{(а)} \int x\,e^{-x}\,dx; \quad \text{(б)} \int x\,\cos x\,dx; \quad \text{(в)} \int x\,\operatorname{ch} x\,dx;$$

$$\text{(г)} \int x^2\,\arccos x\,dx; \qquad \text{(д)} \int x^{-2}\,\arcsin x\,dx.$$

28. Посчитайте тем же методом еще несколько интегралов с участием квадратных корней:

$$\text{(а)} \int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx; \quad \text{(б)} \int e^{\sqrt{x}}\, dx; \quad \text{(в)} \int x \sin \sqrt{x}\, dx.$$

29. Тему завершают следующие замечательные интегралы:

$$\text{(а)} \int \sin \ln x\, dx; \qquad \text{(в)} \int e^{ax} \sin bx\, dx;$$

$$\text{(б)} \int \cos \ln x\, dx; \qquad \text{(г)} \int e^{ax} \cos bx\, dx.$$

Они часто встречаются и вполне заслуживают вашего внимания.

Интегрирование рациональных функций

Интеграл рациональной функции всегда вычисляется «в конечном виде» и выражается через логарифм, арктангенс и рациональные же функции. Чтобы считать такие интегралы, нужно знать, что такое простейшая дробь, уметь ее интегрировать, а еще — научиться разлагать рациональную функцию в сумму таких дробей. Прочитайте об этом у Фихтенгольца или Кудрявцева. Прочитали? А теперь примените свои познания.

30. Разлагая рациональную функцию в сумму простейших дробей «линейного» типа, найдите интегралы:

$$\text{(а)} \int \frac{2x+3}{(x-2)\,(x+5)}\, dx; \quad \text{(б)} \int \frac{x\, dx}{(x+1)\,(x+2)\,(x+3)};$$

$$\text{(в)} \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\, dx; \quad \text{(г)} \int \frac{x^4\, dx}{x^4-5x^2+4}.$$

31. Интересно, как вы поступите с кратными множителями:

$$\text{(а)} \int \frac{x^2+1}{(x+1)^2\,(x-1)}\, dx; \qquad \text{(б)} \int \frac{dx}{(x+1)\,(x+2)^2\,(x+3)^3}.$$

32. Разлагая рациональную функцию в сумму простейших дробей «квадратичного» типа, найдите интегралы:

$$\text{(а)} \int \frac{x^4\, dx}{x^4+5x^2+4}; \quad \text{(б)} \int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\, dx.$$

33. Посчитайте еще несколько безобидных на вид интегралов, где участвуют уже дроби обоих типов:

$$\text{(а)} \int \frac{dx}{x^3-1}; \quad \text{(б)} \int \frac{dx}{x^3+1}; \quad \text{(в)} \int \frac{dx}{x^4-1}; \quad \text{(г)} \int \frac{dx}{x^4+1}.$$

34. Применяя метод Остроградского «выделения рациональной части интеграла», решите следующие примеры:

$$\text{(а)} \int \frac{dx}{(x^3+1)^2}; \quad \text{(б)} \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}; \quad \text{(в)} \int \frac{dx}{(x^4+1)^2}; \quad \text{(г)} \int \frac{dx}{(x^4-1)^3};$$

35. Для тренировки посчитайте еще несколько интегралов от рациональных функций:

$$\text{(а)} \int \frac{x\,dx}{x^8-1}; \qquad \text{(б)} \int \frac{x^3\,dx}{x^8+3}; \qquad \text{(в)} \int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx;$$

$$\text{(г)} \int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,dx; \quad \text{(д)} \int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\,dx; \quad \text{(е)} \int \frac{dx}{x\,(x^{10}+1)^2}.$$

Применяя различные приемы и проявляя некоторую изобретательность, вы сможете заметно упростить себе задачу.

Классические подстановки

При интегрировании выражений, содержащих «дробно-линейные иррациональности» вида

$$\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad \text{где} \quad ac \neq bd,$$

полезно этот корень взять за новую переменную.

36. Посчитайте следующие интегралы, сведя их к интегралам от рациональных функций:

$$\text{(а)} \int \frac{x\,\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx; \qquad \text{(в)} \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx;$$

$$\text{(б)} \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx; \qquad \text{(г)} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2\,(x-1)^4}}.$$

При интегрировании выражений, содержащих «квадратичные иррациональности» вида

$$\sqrt{ax^2+bx+c},$$

часто бывают полезны подстановки Эйлера. А именно, мы переходим к новой переменной z, полагая:

$$(1)\ \sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x + z, \quad \text{если} \quad a>0;$$

$$(2)\ \sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} + x\,z, \quad \text{если} \quad c>0.$$

37. Посчитайте следующие интегралы, сведя их к интегралам от рациональных функций:

(а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$; (б) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$;

(в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$; (г) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Теперь мы рассмотрим вопрос об интегрировании так называемых «биномиальных дифференциалов», т. е. о вычислении интегралов вида

$$\int x^m\,(a+bx^n)^p\,dx,$$

где m, n и p означают рациональные числа, а коэффициенты a и b оба отличны от нуля. Как доказал Чебышёв, такой интеграл выражается в элементарных функциях ровно в трех случаях.

Первый случай: число p целое. Предлагается подстановка $x = z^N$, где в качестве N берется общий знаменатель дробей m и n.

Второй случай: число $(m+1)/n$ целое. Новая переменная z в этом случае определяется из уравнения $a+bx^n = z^N$, где N теперь означает знаменатель дроби p.

Третий случай: число $p+(m+1)/n$ целое. Здесь применяют подстановку $ax^{-n}+b = z^N$, где в качестве N, как и в предыдущем случае, берется знаменатель дроби p.

38. Посчитайте следующие интегралы, сведя их к интегралам от рациональных функций:

(а) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}$; (в) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$; (д) $\displaystyle\int \sqrt{x^3+x^4}$;

(б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(1-\sqrt{x})}$; (г) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\,\sqrt[5]{1+1/x}}$; (е) $\displaystyle\int \sqrt[3]{3x-x^3}$.

Если подынтегральная функция «рационально» выражается через $\sin x$ и $\cos x$, вычисление ее интеграла подстановкой $t = \operatorname{tg}(x/2)$ сводится к интегрированию рациональной функции. Если функция нечетным образом зависит от $\sin x$ или $\cos x$, более «экономной» часто оказывается подстановка $t = \cos x$ или соответственно $t = \sin x$. Если же функция сохраняет значение при одновременной замене $\sin x$ и $\cos x$ на $-\sin x$ и $-\cos x$, то выгодна подстановка $t = \operatorname{tg} x$.

39. Посчитайте следующие интегралы, сведя их к интегралам от рациональных функций:

(а) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2\cos x}$; (в) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\cos x)\,\sin x}$; (д) $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$;

(б) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+2\cos x}$; (г) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\sin x)\,\cos x}$; (е) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

40. Применяя различные методы, найдите интегралы от нескольких трансцендентных функций:

(а) $\displaystyle\int x^2\,e^x\,\cos x\,dx$; (в) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$; (д) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$;

(б) $\displaystyle\int x\,e^x\,\sin^2 x\,dx$; (г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$; (е) $\displaystyle\int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.

41*. С каждым многочленом $P(x)$ и отличным от нуля числом ω свяжем две суммы:

$$A(x) = \sum_{k\ge 0} \frac{P^{(2k)}(x)}{\omega^{2k}} \quad \text{и} \quad \sum_{k\ge 0} \frac{P^{(2k-1)}(x)}{\omega^{2k-1}}.$$

Докажите, что тогда

$$\int P(x)\cos\omega x\,dx = \frac{A(x)\sin\omega x + B(x)\cos\omega x}{\omega} + C$$

и, аналогично,

$$\int P(x)\sin\omega x\,dx = \frac{B(x)\sin\omega x - A(x)\cos\omega x}{\omega} + C.$$

Примеры неэлементарных интегралов

Как мы знаем, производная элементарной функции также является функцией элементарной. Для интегралов же это совсем не так. Иначе говоря, некоторые неэлементарные функции могут иметь элементарные производные. В этом нет ничего удивительного — мы же знаем, например, что иные трансцендентные функции вроде логарифма или арктангенса имеют рациональные производные. Это значит, что класс рациональных функций, «инвариантный» относительно дифференцирования, не обладает этим свойством по отношению к обратной операции интегрирования. Аналогично обстоят дела и с классом функций, исторически получивших название элементарных.

Между тем многие неопределенные интегралы, не удостоенные чести называться элементарными, представляют собой функции, играющие важную роль в различных областях науки. Эти функции изучены не менее полно, чем экспонента или синус, а вычисление их значений или построение их графиков благодаря хорошим компьютерным программам не составляет никакого труда. К их числу относятся, например,

(1) Интегральные экспонента и логарифм:

$$\mathrm{Ei}\,(x) = \int \frac{e^x}{x}\,dx; \qquad \mathrm{li}\,(x) = \int \frac{dx}{\ln x}.$$

(2) Интегральные синус и косинус:

$$\mathrm{Si}\,(x) = \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad \mathrm{Ci}\,(x) = \int \frac{\cos x}{x}\,dx;$$

(3) Интегральные гиперболические синус и косинус:

$$\mathrm{Shi}\,(x) = \int \frac{\mathrm{sh}\,x}{x}\,dx, \qquad \mathrm{Chi}\,(x) = \int \frac{\mathrm{ch}\,x}{x}\,dx;$$

(4) Интегралы Френеля:

$$S\,(x) = \int \sin\left(x^2\right)dx, \qquad C\,(x) = \int \cos\left(x^2\right)dx;$$

(5) Интеграл Эйлера — Пуассона:

$$\Phi\,(x) = \int e^{-x^2}\,dx;$$

Для полного определения этих функций, разумеется, нужно указать еще какие-нибудь «начальные» или «граничные» их значения.

42. С точностью до линейного слагаемого посчитайте интегралы от перечисленных выше девяти новых для вас функций.

43*. Опираясь на тот известный факт, что интегральный логарифм не входит в класс элементарных функций, выясните, каким должен быть многочлен $P(x)$, чтобы интеграл

$$\int P(1/x)\, e^x\, dx$$

был элементарной функцией.

Определенный интеграл «Ньютона — Лейбница»

Так мы будем называть приращение первообразной. Точнее, если функция $f(x)$ определена на отрезке $a \le x \le b$ и имеет на нем первообразную $F(x)$, то мы полагаем

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx := F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} := F(b) - F(a).$$

Определение корректно, поскольку любые две первообразные одной и той же функции на заданном промежутке отличаются лишь постоянным слагаемым. Чтобы не было хлопот с проблемой существования первообразной, будем считать все подынтегральные функции непрерывными — у них первообразные есть всегда.

44. Линейность интеграла. Пусть $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ всюду на отрезке $a \le x \le b$, причем коэффициенты c_1 и c_2 постоянны. Докажите, что тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = c_1 \int\limits_a^b f_1(x)\, dx + c_2 \int\limits_a^b f_2(x)\, dx.$$

45. Аддитивность интеграла. Пусть $a < c < b$. Докажите, что

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx.$$

46. Знакомство с новым понятием начните вычислением совсем простых интегралов:

$$\int\limits_a^b x\,dx; \qquad \int\limits_a^b x^2\,dx; \qquad \int\limits_1^e \frac{dx}{x}; \qquad \int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2},$$

47. Вот еще три простых примера:

$$\int\limits_0^{\ln\pi} e^x\,dx; \qquad \int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx; \qquad \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx.$$

48. Опираясь на доказанные вами теоремы 44 и 45, сведите следующие два интеграла к уже известным и посчитайте их:

$$\text{(а)} \int\limits_{-1}^{1} \left(|1+2x| - |1-2x|\right)\,dx; \quad \text{(б)} \int\limits_{-1}^{1} \big||1+2x| - |1-2x|\big|\,dx.$$

49. Посчитайте еще несколько простых интегралов и нарисуйте выражаемые ими «криволинейные площади»:

$$\text{(а)} \int\limits_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}; \quad \text{(б)} \int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{(в)} \int\limits_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

50. Вычислите три симпатичных интеграла с параметрами:

$$\text{(а)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\,\cos\alpha + 1}, \quad \text{где} \quad 0 < \alpha < \pi;$$

$$\text{(б)} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon\,\cos x}, \quad \text{где} \quad 0 \le \varepsilon < 1;$$

$$\text{(в)} \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\,\cos^2 x + b^2\,\sin^2 x}, \quad \text{где} \quad ab \ne 0.$$

51. Пусть функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $\alpha \le t \le \beta$ и отображает его в промежуток, в каждой точке x которого определена и непрерывна функция $f(x)$. Полагая $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, докажите формулу замены переменной в определенном интеграле:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

52. Применяя подходящую замену переменной, посчитайте определенные интегралы:

(а) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}\,dx;$ (в) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx;$

(б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx;$ (г) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx.$

53. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $a \le x \le b$. Докажите равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int\limits_0^1 f(a+(b-a)x)\,dx.$$

54. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $0 \le x \le a$. Докажите равенство

$$\int\limits_0^a x^3 f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{a^2} x\,f(x)\,dx.$$

55. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $0 \le x \le 1$. Докажите равенство

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx.$$

Опираясь на это наблюдение, вычислите следующие два интеграла, рассмотрев их сумму:

$$\text{(а)} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx \qquad \text{(б)} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx.$$

56. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $0 \le x \le 1$. Докажите равенство

$$\int\limits_0^{\pi} x\,f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

Опираясь на это замечательное соотношение, посчитайте следующие два интеграла:

$$\text{(а)} \int\limits_0^{\pi} \frac{x\,\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx; \quad \text{(б)} \int\limits_0^{\pi} \frac{x\,\sin x \cos^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

57. Пусть функция f непрерывна и имеет период T. Докажите, что в таком случае

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^{T} f(x)\,dx,$$

для любого числа a. Выясните, при каких условиях первообразная периодической функции также будет периодической.

58. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $a \le x \le b$. Докажите формулу интегрирования по частям для определенных интегралов:

$$\int\limits_a^{b} u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int\limits_a^{b} v(x)u'(x)\,dx.$$

59. Применяя только что установленную вами формулу, посчитайте интегралы:

$$\text{(а)} \int\limits_0^{1} x\,e^x\,dx; \qquad \text{(в)} \int\limits_0^{\pi} x\,\sin x\,dx; \qquad \text{(д)} \int\limits_0^{1} \arccos x\,dx;$$

$$\text{(б)} \int\limits_1^e \ln x\,dx; \qquad \text{(г)} \int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x\,dx; \quad \text{(е)} \int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx.$$

Выясните, случайно ли совпали ответы в примерах (а) и (б).

60. Интегрируя по частям, найдите рекуррентные соотношения для следующих трех последовательностей интегралов:

$$\text{(а)}\ I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx; \quad \text{(б)}\ I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx; \quad \text{(в)}\ I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Посчитайте все указанные интегралы. Объясните результаты.

61. Считая m и n неотрицательными целыми числами, посчитайте еще два интеграла:

$$\text{(а)} \int\limits_0^1 (1-x^2)^n\,dx; \qquad \text{(б)} \int\limits_0^1 x^m (\ln x)^n\,dx.$$

62*. Хочется верить, что вычисление следующих двух интегралов завершится вашими яркими положительными эмоциями:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+e^{\sin x}}, \qquad \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\operatorname{tg}^\gamma x}.$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $a \le x \le b$. Отношение

$$\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

называют ее *средним значением* на этом отрезке.

63. Найдите среднюю скорость свободно падающего тела, если его начальная и конечная скорости соответственно равны v_0 и v_1.

64. Выясните, чему равна средняя длина хорды, стягивающей две наугад выбранные точки окружности радиуса R.

Вычисление несобственных интегралов

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $a \leq x < \omega$, где a означает конечное число, а ω может быть и бесконечным. *Несобственным интегралом* этой функции на указанном промежутке называют предел

$$\int\limits_a^\omega f(x)\,dx := \lim_{b\to\omega-0} \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

если, разумеется, таковой существует. Если предел существует и конечен, несобственный интеграл считают *сходящимся.* Если же этот предел бесконечен, либо его вовсе нет, говорят, что несобственный интеграл *расходится.* Аналогично определяются и несобственные интегралы для того случая, когда «особой точкой» служит левый конец промежутка интегрирования. К этим двум вариантам сводятся и более общие конструкции несобственных интегралов, у которых может быть несколько особенностей, расположенных внутри или на границе промежутка интегрирования.

65. Докажите, что для непрерывной на отрезке функции понятие несобственного интеграла — какую бы точку в качестве «особой» ни взять — совпадает с обычным определенным ее интегралом.

Таким образом, нет ничего предосудительного в том, что мы обозначаем несобственный интеграл прежним символом, который теперь обретает лишь более широкое значение.

66. Распространите на несобственные интегралы формулу Ньютона — Лейбница, теорему о замене переменной и метод интегрирования по частям.

67. Вот ваши первые несобственные интегралы:

$$\text{(а)}\ \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}; \qquad \text{(б)}\ \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}; \qquad \text{(в)}\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x};$$

$$\text{(г)}\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}; \qquad \text{(д)}\ \int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Нарисуйте области на плоскости, чьи площади выражаются этими интегралами. Сравните геометрически ответы в примерах (а) и (б).

68. Посчитайте интегралы от рациональных функций:

$$\text{(а)}\ \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}; \qquad \text{(б)}\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}; \qquad \text{(в)}\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

69. Применяя разные приемы, посчитайте интегралы:

$$\text{(а)}\ \int\limits_{0}^{1} \ln x\, dx; \quad \text{(б)}\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\ \ln x\, dx}{(1+x^2)^2}; \quad \text{(в)}\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

70. Докажите, что для всех $a > 0$ и любого вещественного b справедливы следующие две красивые формулы:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

71. Понижая степень, посчитайте несобственные интегралы:

$$\text{(а)}\ \int\limits_{0}^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx; \quad \text{(б)}\ \int\limits_{0}^{1} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^n dx.$$

Объясните совпадение результатов.

72. Вернитесь на минутку к задачам 60 и 61. Не затерялась ли там среди обычных интегралов парочка несобственных? Возможно, вы еще тогда, и глазом не моргнув, посчитали эти интегралы. Судя по всему, вы просто предвидели конструкцию несобственного интеграла, и теперь она для вас совершенно естественна. Если же вы обратили внимание на неограниченность некоторых функций, и это обстоятельство не позволило вам применить единственный имевшийся у вас подход к интегрированию, то вы проявили похвальную проницательность, характерную для острого критического ума. Теперь вы с удовлетворением обнаружите, что оставленные вами интегралы имеют смысл, и легко посчитаете их.