

В. В. Иванов

Математический анализ

*ФФ НГУ, 1 семестр
Продолжение программы курса*

Задачи для семинаров и самостоятельной работы

5. Дифференциальные уравнения (Сдать до 31 октября)

Уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Интегрирование однородных уравнений. Линейные уравнения и вариация постоянной. Как возникают дифференциальные уравнения. Одномерные динамические системы. Выход в комплексную область. Комплексная экспонента. Линейные уравнения второго порядка. Факторизация дифференциальных операторов. Формулы свободных колебаний. Формулы вынужденных колебаний. Фазовые портреты двумерных систем. Консервативная система Ньютона.

Примечание. Речь идет, разумеется, о простейших дифференциальных уравнениях. Перечень представленных здесь тем и задач ориентирован, прежде всего, на потребности начального курса механики. Задач довольно много, но с этим ничего не поделаешь — дифференциальные уравнения имеют для физики огромное значение. Для облегчения участи студентов и их преподавателей мы рассказываем здесь, хоть и кратко, о методах решения основных типов обсуждаемых в нашем курсе дифференциальных уравнений. Следует иметь в виду, что главные для нас темы — это уравнения с разделяющимися переменными, линейные уравнения, формулы свободных колебаний, формулы вынужденных колебаний, построение фазового портрета консервативной системы Ньютона по графику потенциальной энергии.

Необходимые задачи. 1, 2, 4, 6, 7, 9, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 28, 34 — 41, 61, 62, 63, 73, 74, 75, 78, 79, 80, 85 — 102, 104 — 108.

С остальным материалом задания нужно хотя бы познакомиться.

Желаю всем успехов и радости!

В. В. Иванов

5. Дифференциальные уравнения

Уравнения первого порядка

Пусть D означает некоторое множество пар (x, y) , составленных из вещественных чисел x и y . Если каждой такой паре тем или иным способом поставлено в соответствие некоторое число $f(x, y)$, говорят, что на множестве D определена функция $f(x, y)$ двух вещественных переменных x и y .

Дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной, называют уравнение вида

$$y' = f(x, y).$$

Функцию $y = y(x)$, определенную и дифференцируемую при всех значениях x из некоторого интервала Δ , называют *решением* этого уравнения, если для всякой точки $x \in \Delta$ пара $(x, y(x))$ принадлежит области D и $y'(x) = f(x, y(x))$. Графики решений называют *интегральными линиями* уравнения.

1. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в каждой точке x интервала Δ . Докажите, что для любой точки $x_0 \in \Delta$ и для любого заданного числа y_0 существует ровно одно решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x)$, определенное на всем интервале Δ и удовлетворяющее «начальному условию» $y(x_0) = y_0$. Это решение дается формулой

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi.$$

Как мы видим, дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, бесконечно много решений. В свое время вы убедитесь, что для достаточно «хороших» областей D и заданных на них функций $f(x, y)$ через каждую точку, лежащую в D , можно провести интегральную линию уравнения $y' = f(x, y)$. Если точка имеет координаты (x_0, y_0) , то о соответствующем решении $y = y(x)$ говорят, что оно удовлетворяет *начальному условию* $y(x_0) = y_0$. Задачу построения решения, удовлетворяющего заданному начальному условию, называют *задачей Коши*.

2. Найдите два принципиально различных решения следующей задачи Коши:

$$y' = \sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0.$$

Этот выразительный классический пример показывает, что с вопросом единственности дело обстоит не так просто. Тем не менее, существует широкий класс дифференциальных уравнений, для которых в указанном плане ситуация предельно ясна, а именно: задание начального условия однозначно определяет решение уравнения. Впрочем, утверждению об однозначности нужно еще придать точный смысл. В самом деле, если мы имеем решение $y = y(x)$ того или иного дифференциального уравнения, которое определено на интервале Δ и удовлетворяет условию $y(x_0) = y_0$, где $x_0 \in \Delta$, то для каждого лежащего в Δ меньшего интервала, содержащего точку x_0 , сужение на него функции y , формально говоря, будет другим решением того же уравнения, график которого проходит через ту же точку (x_0, y_0) . Это значит, что в буквальном смысле единственности не бывает никогда. Говоря об однозначной разрешимости дифференциального уравнения, имеют в виду, что любые два его решения, удовлетворяющие одному и тому же начальному условию, совпадают на общем интервале, где они оба заданы.

3. Пусть для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, как говорят, справедлива «теорема существования и единственности». Докажите, что тогда для любой точки (x_0, y_0) из области определения функции f существует ровно одно решение $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$ и обладающее следующим свойством «непродолжаемости»: любое другое решение нашего уравнения, удовлетворяющее тому же начальному условию, является сужением функции y на некоторый меньший интервал.

Уравнения с разделяющимися переменными

Здесь мы изучим замечательный класс дифференциальных уравнений, которые, с одной стороны, встречаются в большом числе самых разнообразных задач, а с другой — решаются, как говорят, «в квадратурах». Это значит, что их решения могут быть выражены с помощью интегралов от заданных функций.

Рассмотрим две функции $p = p(x)$ и $q = q(y)$, определенные соответственно на интервалах Δ и I . Каждая такая пара функций

порождает дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' = p(x)q(y)$$

Как можно доказать, непрерывности функции p и дифференцируемости функции q более чем достаточно для того чтобы через каждую точку прямоугольника $\Delta \times I$ проходила ровно одна интегральная линия этого уравнения. Предполагая выполненными указанные условия, научимся находить все такие линии.

Прежде всего в интервале I отметим все точки y_* , где $q(y_*) = 0$, и заметим, что для каждой из них постоянная на всем интервале Δ функция $y(x) \equiv y_*$ служит решением обсуждаемого уравнения. Не следует забывать об этих тривиальных, но исключительно важных решениях. Удалим из интервала I все нули функции q . Оставшееся множество распадается на конечное или счетное семейство меньших интервалов. Пусть J будет одним из них. Каждая интегральная линия, оказавшаяся хотя бы на минутку в прямоугольнике $\Delta \times J$, на самом деле целиком расположена в нем. Поскольку $q \neq 0$ всюду на J , мы вправе, переходя к дифференциалам, представить наше уравнение в следующей привлекательной форме:

$$\frac{dy}{q(y)} = p(x) dx.$$

Переменные «разделились», и теперь уже невозможно удержаться, чтобы не проинтегрировать обе части этого равенства: правую — по переменной x , левую — по y . Пусть $P(x)$ и $Q(y)$ означают первообразные функций $p(x)$ и $1/q(y)$, из которых первая существует на интервале Δ , а вторая определена на интервале J . Каждая функция $y = y(x)$, определенная на некотором лежащем в Δ интервале и удовлетворяющая на нем — уже не дифференциальному — уравнению $P(x) = Q(y(x))$, служит решением исходного уравнения. При этом всякое решение с начальными условиями из прямоугольника $\Delta \times J$ получается таким образом.

Если нам нужно найти решение $y = y(x)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$ для заданных точек $x_0 \in \Delta$ и $y_0 \in J$, мы выберем указанные первообразные $P(x)$ и $Q(y)$ так, чтобы выполнялось равенство $P(x_0) = Q(y_0)$.

4. Разделяя переменные, для каждого из указанных ниже уравнений найдите все их решения $y = y(x)$, и укажите, какие из них

удовлетворяют заданным начальным условиям:

$$(a) \quad xy \, dx + (x + 1) \, dy = 0; \quad y(0) = 1 \quad \text{или} \quad y(1) = 0;$$

$$(б) \quad \sqrt{y^2 + 1} \, dx = xy \, dy; \quad y(1) = -1 \quad \text{или} \quad y(-1) = 1;$$

$$(в) \quad y' \operatorname{ctg} x + y = 2; \quad y(0) = -1 \quad \text{или} \quad y(\pi) = 5;$$

$$(г) \quad (x - 1)^2 y' + 2xy^2 = 0; \quad y(0) = 1 \quad \text{или} \quad y(0) = -1.$$

5. Заменяя искомую функцию y новой функцией z по формуле вида $z = ax + by + c$, решите следующие уравнения и указанные для них задачи Коши:

$$(a) \quad y' - y = 2x - 3; \quad y(0) = 0 \quad \text{или} \quad y(0) = 1;$$

$$(б) \quad (x + 2y) y' = 1; \quad y(0) = 0 \quad \text{или} \quad y(0) = -1.$$

6. Найдите решение уравнения $x^2 y' - \cos 2y = 1$, которое при $x \rightarrow \infty$ стремится к числу $9\pi/4$.

7. Убедитесь в том, что среди всех решений дифференциального уравнения $3y^2 y' + 16x = 2xy^3$ только одно при $x \rightarrow \infty$ остается ограниченным. Укажите его.

8. Найдите дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют линии следующих двух семейств:

$$(a) \quad y = Cx^2; \quad (б) \quad y = Ce^x.$$

С этой целью полезно продифференцировать указанные формулы по независимой переменной и исключить постоянную. Для каждого из указанных семейств найдите все ортогональные ему линии.

Интегрирование однородных уравнений

Однородным называют дифференциальное уравнение вида

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right),$$

где h означает функцию одной переменной, относительно которой мы будем предполагать, что она задана на некотором интервале и

дифференцируема на нем. Чтобы найти все решения такого уравнения, мы перейдем от y к новой функции u прежней переменной x , полагая $y = xu$. Тогда $y' = u + xu'$, и мы приходим к уравнению с разделяющимися переменными:

$$u' = \frac{h(u) - u}{x}.$$

Дальнейшее нам уже известно. А именно, прежде всего мы находим все значения u_* из уравнения $h(u_*) - u_* = 0$, или $h(u_*) = u_*$. Для каждого такого значения решением преобразованного уравнения будет постоянная функция $u(x) \equiv u_*$, а решением исходного уравнения — линейная однородная функция $y(x) = u_*x$. Удаляя теперь все изученные точки из интервала, где задана функция h , мы разобьем оставшуюся область определения этой функции на несколько меньших интервалчиков и на каждом из них запишем последнее уравнение в виде

$$\frac{du}{h(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Остается вычислить интегралы и от вспомогательной функции u вернуться к прежней функции y .

9. Решите уравнения:

(а) $(x + 2y) dx - x dy = 0$;

(б) $(x - y) dx + (x + y) dy = 0$;

(в) $(y^2 - 2xy) dx + x^2 dy = 0$.

Примечание: «симметричная» форма записи уравнений позволяет говорить не только о функциях $y(x)$, но и функциях $x(y)$.

Если дифференциальное уравнение преобразуется к виду

$$y' = H\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right),$$

оно приводится к однородному путем перенесения начала координат в точку пересечения прямых

$$ax + by + c = 0 \quad \text{и} \quad Ax + By + C = 0.$$

Если эти прямые параллельны, то правая часть уравнения, очевидно, есть функция от $ax + by$, и тогда замена $z = ax + by$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными.

9. Воспользуйтесь предыдущими замечаниями и решите еще три уравнения:

$$(a) \quad x - y - 1 + (y - x + 2) y' = 0;$$

$$(б) \quad (x + 4y) y' = 2x + 3y - 5;$$

$$(в) \quad y' = \frac{y + 2}{x + 1} + \operatorname{tg} \frac{y - 2x}{x + 1}.$$

10. Некоторые уравнения сводятся к однородным заменой вида $y = z^m$ при подходящем выборе показателя m . Применяя это соотношение, решите уравнения:

$$(a) \quad x^3 (y' - x) = y^2; \quad (в) \quad 2x dy + (x^2 y^4 + 1) y dx = 0;$$

$$(б) \quad 2x^2 y' = y^3 + xy; \quad (г) \quad y dx + x (2xy + 1) dy = 0.$$

11. Найдите линии на координатной плоскости, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат. Нарисуйте эти линии. Дайте элементарно-геометрическое объяснение указанному их свойству.

12. Найдите линии на той же плоскости, у которых расстояние до любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания. Нарисуйте эти линии. Теперь, когда вид указанных линий вам известен, докажите средствами школьной геометрии, что они действительно обладают указанным свойством.

Линейные уравнения и «вариация постоянной»

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называют уравнение вида

$$y' = ay + b,$$

где $a = a(x)$ и $b = b(x)$ представляют собой функции переменной x . Мы будем считать их определенными на некотором интервале Δ и непрерывными в каждой его точке.

Заметим, что в случае $b \equiv 0$ переменные разделяются, и легко убедиться, что все решения уравнения имеют вид

$$y(x) = C e^{A(x)},$$

где $A(x)$ означает любую первообразную функции $a(x)$, которую всегда можно построить на всем промежутке Δ .

Метод «вариации постоянной» заключается в том, что участвующую в предыдущей формуле постоянную C мы «объявляем» дифференцируемой функцией переменной x и решение исходного линейного уравнения ищем в виде:

$$y(x) = C(x) e^{A(x)}.$$

Правомерность такого подхода к решению задачи очевидна: любую дифференцируемую функцию $y(x)$ при желании всегда можно представить в указанной форме, поскольку экспоненциальный множитель является дифференцируемой функцией и никогда не бывает равным нулю. Другое дело — что полезного сулит нам это представление? Для ответа на последний вопрос достаточно подставить записанную в указанной форме функцию $y(x)$ в наше уравнение и убедиться, что оно приводится к простейшему виду:

$$C'(x) e^{A(x)} = b(x), \quad \text{или} \quad C'(x) = b(x) e^{-A(x)}.$$

Таким образом, еще одним интегрированием мы находим множитель $C(x)$, а вслед за ним — и решение $y(x)$ исходного уравнения.

13. Докажите, что для любой точки $x_0 \in \Delta$ и произвольного значения y_0 линейное уравнение $y' = ay + b$ имеет решение $y = y(x)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, среди всех таких решений ровно одно определено на всем интервале, где заданы и непрерывны коэффициентами a и b , а все другие решения с тем же начальным условием являются просто его сужениями на меньшие интервалы.

14. Решите уравнения:

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad x y' - 2y - 2x^4 &= 0; & \text{(в)} \quad y &= x(y' - x \cos x); \\ \text{(б)} \quad x^2 y' + xy + 1 &= 0; & \text{(г)} \quad (x y' - 1) \ln x &= 2y. \end{aligned}$$

15. С помощью подходящих замен переменных сведите следующие уравнения к линейным и решите их:

$$\text{(а)} \quad x dx = (x^2 - 2y + 1) dy; \quad \text{(б)} \quad (x + 1)(y y' - 1) = y^2.$$

16. Убедитесь в том, что уравнение Бернулли

$$y' = a(x)y + b(x)y^n$$

при $n \neq 1$ заменой $z = 1/y^{n-1}$ сводится к линейному уравнению относительно новой функции $z = z(x)$.

17. На интервале $|x| < \pi/2$ найдите дифференцируемую функцию $y = y(x)$, которая удовлетворяет уравнению

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$$

и остается ограниченной при $x \rightarrow \pi/2$. Постройте ее график.

Как возникают дифференциальные уравнения

18. Период полураспада изотопа радия-226, как всем известно, составляет 1620 лет. За какое время исходное количество этого радиоактивного вещества уменьшается втрое?

19. Население пруда размножается со скоростью, пропорциональной числу имеющихся в данный момент особей. Выясните, за какое время население удваивается, если коэффициент пропорциональности равен $\ln 2$. Каким был бы рост числа особей, если скорость их размножения была бы пропорциональна количеству пар?

20. Вычислите высоту Эльбруса, о котором хорошо известно, что плотность воздуха на его вершине вдвое меньше, чем у основания. Сведения, необходимые для решения этой задачи, сводятся к следующим положениям:

(а) как вытекает из закона Бойля — Мариотта, плотность воздуха пропорциональна давлению; здесь мы пренебрегаем зависимостью температуры воздуха от высоты;

(б) кубометр воздуха на поверхности Земли при нормальных условиях имеет массу 1290 г;

(г) атмосферное давление на поверхности Земли при тех же условиях равно 760 мм ртутного столба;

(д) плотность ртути равна $13,6 \text{ г/см}^3$.

21. Тело охладилось за 10 минут от 100° до 60° . Узнайте, когда тело остынет до 25° , если температура воздуха поддерживается равной 20° , а скорость остывания пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

22. Масса ракеты с полным запасом топлива равна M , без топлива ракета имеет массу m . Скорость истечения продуктов горения равна v . Начальная скорость ракеты нулевая. Найдите скорость ракеты

после сгорания всего топлива. Здесь вам понадобится закон сохранения импульса, или, как говорили раньше, количества движения. Правильно решив задачу, вы откроете ... формулу Циолковского.

23. Эволюция численности популяции в простейшей модели, учитывающей конкуренцию, описывается дифференциальным уравнением $\dot{x} = (a - bx)x$. Здесь $x = x(t)$ имеет смысл численности или, если угодно, массы популяции в момент t , точка над буквой означает производную по времени, а положительные постоянные a и b определяются особенностями каждой конкретной популяции и условиями ее обитания. Постройте интегральные линии указанного уравнения, лежащие выше оси t , и убедитесь, что все они при $t \rightarrow \infty$ выходят на некий единый уровень, соответствующий устойчивому состоянию равновесия. Найдите его. Прокомментируйте поведение решений в житейско-биологических терминах.

24. Парашютист прыгнул с высоты 1.5 км, а парашют раскрыл на расстоянии 500 м от земли. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта? Известно, что предельная скорость падения человека в воздухе составляет 50 м/сек. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости.

25. Сосуд объемом в 20 л наполнен воздухом, содержащим 80% азота и 20% кислорода. За каждую секунду в сосуд втекает 0,1 л азота, который мгновенно перемешивается. За ту же секунду из сосуда вытекает такое же количество смеси. За какое время в сосуде накопится 99% азота?

26. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода — 5 л в минуту. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли в баке останется через час?

В следующих нескольких задачах речь пойдет о воде, вытекающей из сосуда через отверстие в нем. Экспериментально установлено, что скорость вытекающей воды равна

$$0,6 \sqrt{2gh},$$

где $g = 9,8 \text{ м/сек}^2$ — ускорение свободного падения, h — высота уровня воды над отверстием, выраженная в метрах.

27. Выясните, за какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака радиуса 0,9 м и высоты 2,45 м через круглое отверстие в

его дне радиуса 3 см. Ось цилиндра вертикальна. Интересно узнать, как изменится ответ, если бак положить на бок и продырявить его в самой нижней его части.

28. Цилиндрический бак поставлен вертикально и имеет отверстие внизу. Половина воды вытекла из бака за 5 минут. Прежде чем вытечет оставшаяся половина, постарайтесь успеть выяснить, сколько времени ей для этого понадобится. Если вы уже знаете ответ, а вода еще продолжает вытекать, можно считать, что вы добились хороших успехов в учебе.

29. Воронка имеет форму конуса радиуса 6 см и высоты 10 см, обращенного вершиной вниз. За какое время из воронки вытечет вся вода через круглое отверстие диаметра 0,5 см внизу конуса?

30. Сосуд имеет форму поверхности вращения. Ось вращения вертикальна. Сосуд наполнен водой. Дно сосуда имеет дырку. Пользуясь случаем выясните, каким должен быть профиль поверхности вращения, чтобы уровень воды в сосуде понижался равномерно.

Одномерные динамические системы

Положение точки на прямой можно задать одним числом. Для этого достаточно прямую превратить в числовую ось, выбрав на ней начало отсчета, масштабный отрезок и направление. Вектор на такой прямой тоже задается одним числом. Верно и обратное — каждое число можно трактовать как вектор на нашей прямой. Таким образом, любую вещественную функцию $v = v(x)$ можно понимать как векторное поле на прямой линии, считая, что точке с координатой x сопоставлен вектор, чья единственная координата равна $v(x)$.

«В результате прямая буквально оживает — на ней начинает происходить что-то очень необычное и забавное. Точка, доселе неподвижная, а теперь обнаружившая, что к ней прикреплен какой-то вектор, вдруг догадывается, что он указывает ей, в какую сторону и как быстро она должна двигаться. И вот, она отрывается от насиженного места и, уцепившись за врученный ей вектор, начинает путешествие по прямой линии. Вскоре она замечает, что с вектором тоже что-то происходит — он то увеличивается, то уменьшается. Сообразив, в чем дело, она мгновенно приспосабливается к этим переменам, и в полном с ними согласии тоже движется то быстрее,

то медленнее, с интересом разглядывая те места, где она прежде не бывала, где совсем недавно жили ее близкие и дальние соседи. Она с грустью думала о том, что никогда их не видела из-за ужасной тесноты на этой одномерной прямой, у которой нет ни толщины, ни ширины, а есть одна только длина. Она и теперь не увидит их, поскольку смогла оказаться здесь именно потому, что они освободили это место, оставив лишь уже ненужные им прежние свои координаты... Размышляя об этом, точка не сразу заметила, что ее вектор стал каким-то уж совсем маленьким и продолжает таять на глазах. К тому же стало намного теснее, как будто все население прямой собралось на крохотном ее участке. Наверняка где-то впереди есть точка, которой не повезло, и она осталась неподвижной. По-видимому ей достался нулевой вектор, а с таким вектором, сколько ни жди, никуда не уедешь. И вот, теперь все, кому довелось испытать радость движения, стекаются к ней. А может, не все? Интересно, что там, с другой стороны от неподвижной точки? Если там раздали векторы, направленные в ту же сторону, то все потугсторонние точки, напротив, будут удаляться от места столпотворения. Возможно, они тоже встретят на своем пути такую же преграду. А может, и нет. Ах, если бы она могла миновать этот досадный затор! Тогда она могла бы так разогнаться, что за конечное время достигла бы конца этой бессмысленно длинной прямой. Она была бы подобна той маленькой, сказочно-дивной комете, которая, щедро рассыпая себя горящими искрами, в торжественном прощальном полете исчезает за горизонтом и там, за гранью бытия, завершает свою яркую и до обидного краткую жизнь. Она еще не догадывалась, что станет с нею дальше, не знала, что всю оставшуюся вечность ей суждено безропотно стремиться к неподвижному пределу, никогда его не достигая...»

Итак, на прямой, как только мы задали на ней векторное поле $v(x)$, зарождаются движения. Возникает динамика. *Движение* — это дифференцируемая функция $x = x(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\dot{x} = v(x),$$

где точка над x означает производную x по t . Иначе говоря, движениями мы называем решения дифференциального уравнения специального вида. Отличительная черта этого уравнения в том, что в

правую его часть не входит время. Иначе говоря, скорость движения точки полностью определяется одним лишь ее положением на прямой в данный момент. Такие уравнения называют *автономными*.

31. Какими характерными чертами обладает семейство интегральных линий автономного уравнения?

32. Докажите, что если функция $v(x)$ дифференцируема n раз по переменной x , то любое решение $x = x(t)$ уравнения $\dot{x} = v(x)$ дифференцируемо $n + 1$ раз по времени t . Найдите формулы для второй и третьей производных решения x , выразив их через функцию v и ее производные.

Совокупность всех движений, определяемых автономным уравнением, называют динамической системой. Прямая, на которой реализуются все эти движения, называется *фазовым пространством* системы. В данном случае это пространство одномерно. Будем надеяться, что вам, знакомым с первыми понятиями линейной алгебры, словосочетание «одномерное пространство» уже не слишком режет слух. График движения $x = x(t)$, как и прежде, называют *интегральной линией*. Множество всех значений этой функции, называют *траекторией* движения. Следует различать все эти понятия: движение — это функция x времени t и удовлетворяющая уравнению, интегральная линия — это ее график, лежащий в плоскости (t, x) и состоящий из всех точек $(t, x(t))$, а траектория — это множество на прямой, образованное всеми значениями функции x , или точками вида $x(t)$. В дальнейшем, говоря об интегральных линиях и траекториях, мы будем иметь в виду лишь такие движения, которые определены на максимально возможных для них интервалах.

Одномерные автономные системы относятся к хорошо известному нам классу уравнений с разделяющимися переменными. В частности, они легко интегрируются в квадратурах. Если векторное поле, определяющее такую систему, описывается дифференцируемой функцией, то справедлива «теорема существования и единственности». В этом случае любые две траектории либо вовсе не имеют общих точек, либо полностью совпадают. Таким образом, вся «фазовая прямая» разбивается на отдельные траектории, которые в совокупности составляют *фазовый портрет* системы.

Особую роль в этом портрете играют так называемые *неподвижные*, или *стационарные*, точки. Это те точки x_* , где $v(x_*) = 0$. Для каждой из них постоянная функция $x(t) \equiv x_*$ является решением

уравнения $\dot{x} = v(x)$, соответствующей интегральной линией служит горизонтальная прямая, расположенная в плоскости (t, x) на высоте x_* , а траектория «движения», описываемого такой функцией, сводится к единственной точке x_* . Оставшаяся часть фазовой прямой, свободная от неподвижных точек, распадается на несколько интервалов, каждый из которых представляет собой отдельную траекторию. Движение вдоль этой траектории всюду происходит в одну и ту же сторону, определяемую знаком функции v . На разных траекториях направление может быть разным. Для построения фазового портрета одномерной системы нужно отметить на прямой все неподвижные точки и для каждого из оставшихся интервалов указать направление движения по нему.

33. Докажите, что в системе, удовлетворяющей теореме существования и единственности, любое движение вдоль траектории, стремящейся к неподвижной точке, происходит бесконечно долго. Так будет и в том случае, если время обернется вспять.

Неподвижная точка называется *устойчивой*, если в некоторой ее окрестности, как слева, так и справа, векторное поле направлено к ней. Если же направление поля противоположно описанному, точку называют *неустойчивой*. Наконец, точку считают *полуустойчивой*, если с одной стороны поле направлено к ней, а с другой — от нее.

34. Для каждого типа неподвижной точки опишите поведение интегральных линий, проходящих около соответствующего стационарного решения.

35. Постройте примеры динамических систем на прямой линии, у которых: (а) все точки неподвижные; (б) нет неподвижных точек; (в) одна устойчивая неподвижная точка; (г) одна полуустойчивая неподвижная точка; (д) одна неустойчивая неподвижная точка. Сколько траекторий имеет динамическая система в каждом из этих случаев?

36. Опишите все виды фазовых портретов одномерных динамических систем с двумя неподвижными точками. Сколько их у вас получилось? Для каждого случая приведите конкретный пример. Может ли случиться так, что обе точки окажутся устойчивыми или обе — неустойчивыми? А полуустойчивыми? Сколько траекторий имеют одномерные системы с двумя неподвижными точками?

37. Научитесь строить эскизы интегральных линий уравнения $\dot{x} = v(x)$ по графику функции v . Полезно иметь в виду, что ре-

шение $x = x(t)$ такого уравнения возрастает, если оно «проходит» в области, где $v(x) > 0$, и убывает, если $v(x) < 0$. При желании можно и более детально описать вид интегральной линии. Например, поскольку $\ddot{x} = v'(x)v(x)$, то по сочетанию знака функции v и характера ее монотонности на том или ином участке, мы легко определяем характер выпуклости интегральной линии в том месте, где ее ордината x принадлежит этому участку.

38. Постройте фазовые портреты одномерных динамических систем, определяемых следующими уравнениями:

$$(a) \dot{x} = x; \quad (b) \dot{x} = |x|; \quad (d) \dot{x} = \cos x;$$

$$(б) \dot{x} = -x; \quad (г) \dot{x} = x^2; \quad (e) \dot{x} = \sin x.$$

Постройте сети интегральных линий для каждого из этих уравнений, предварительно построив графики их правых частей. А теперь найдите явные формулы решений и уточните ваши рисунки.

39. В задаче 23 мы рассматривали уравнение $\dot{x} = (a - bx)x$, описывающее динамику численности популяции с учетом конкуренции. Докажите, что при подходящем выборе масштабов для переменных t и x коэффициенты a и b можно превратить в единицу. Таким образом, мы приходим к так называемому логистическому уравнению

$$\dot{x} = x(1 - x).$$

Постройте фазовый портрет этой системы и нарисуйте интегральные линии. Какова максимальная скорость размножения популяции?

40. Представим себе, что рассмотренная выше популяция — это рыбы в озере, и мы решили регулярно отлавливать ее часть. Пусть c означает скорость, или квоту, отлова, т. е. количество рыбы, отлавливаемой в единицу времени. В результате наших действий скорость \dot{x} прироста популяции по сравнению с ее прежней жизнью уменьшается на величину c , и уравнение, описывающее динамику ее численности, преобразуется к следующему виду:

$$\dot{x} = x(1 - x) - c.$$

Проведите подробное исследование этой системы при разных значениях квоты отлова. Опишите характерные черты фазового портрета

и семейства интегральных линий в трех случаях:

$$(a) 0 < c < \frac{1}{4}; \quad (б) c = \frac{1}{4}; \quad (в) c > \frac{1}{4}.$$

Дайте интерпретацию полученным вами результатам. Какие рекомендации вы могли бы дать рыбакам относительно квоты отлова, если они хотят как можно дольше пользоваться дарами природы?

41. Если вы решили предыдущую задачу, то убедились, что скорость отлова не может превосходить $1/4$ — иначе вся популяция будет выловлена за конечное время. Пороговое значение квоты, как вы видели, приводит систему к полуустойчивому состоянию, и практически тоже недопустимо. Впрочем, это понятно и безо всякого анализа, поскольку $1/4$ — это максимальная скорость размножения необлавливаемой популяции, как вы выяснили еще в задаче 39. Между тем, отлов, оказывается, можно организовать таким способом, что добыча будет регулярно поступать со скоростью $1/4$ в единицу времени, а система при этом будет оставаться устойчивой. Для этого нужно отказаться от абсолютной квоты и заменить ее на относительную. Точнее говоря, мы будем отлавливать за единицу времени фиксированную часть имеющейся в данный момент популяции, так что скорость отлова равна теперь px , а уравнение приводится к виду

$$\dot{x} = x(1 - x) - px.$$

Изучите эту динамическую систему: постройте ее фазовый портрет, нарисуйте интегральные линии, определите стационарный режим и характер его устойчивости. Наконец, выяснив для каждого значения p из интервала $0 < p < 1$, какова установившаяся скорость отлова, найдите оптимальное значение этого параметра. Решив эту задачу, вы увидите, как важны для успеха разумный подход к делу, наличие обратной связи и ... умение решать дифференциальные уравнения.

Выход в комплексную область

Элементарная теория линейных колебаний, которая нас ждет впереди, становится особенно элегантной и прозрачной, когда мы решаемся покинуть уютную и привычную для нас, но очень уж одномерную и порой слишком тесную, реально-вещественную прямую и выходим в бескрайнее поле ... комплексных чисел. Здесь наша задача в том, чтобы подготовить к этому смелому шагу необходимый математический аппарат.

Рассмотрим функцию $f(t)$, определенную в каждой точке t некоторого «вещественного» интервала Δ , но принимающую комплексные значения. Таким образом, эта функция может быть записана в виде

$$f(t) = f_1(t) + i f_2(t),$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ представляют собой обычные вещественные функции, заданные на интервале Δ . Если на плоскости, где изображаются комплексные числа, нарисовать радиусы-векторы «точек» 1 и i , то радиус-вектор числа $f(t)$ окажется их линейной комбинацией с коэффициентами $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

Иначе говоря, комплексно-значные функции и уже знакомые нам плоские вектор-функции — это, фактически, одно и то же. Но здесь нам будет важна не только геометрия плоскости, но и имеющаяся на ней замечательная алгебраическая структура, которая превращает эту плоскость в настоящее поле. В результате мы получаем возможность не только складывать и вычитать комплексные числа подобно векторам, но и умножать и делить их друг на друга. Удивительно, что очень немногие находят в себе силы испытать интеллектуально-эстетический восторг от самой возможности определить эти операции таким образом, чтобы они, прекрасно сочетаясь с геометрией евклидовой плоскости, подчинялись всем законам арифметики. Именно в комплексном умножении заключается источник очарования и ослепительного богатства того загадочного комплексного мира, где скрываются порой истинные причины реальных явлений... Здесь мы только чуть-чуть соприкоснемся с ним. Чтобы суметь погрузиться в его сказочные глубины, нужно пройти долгий и нелегкий путь.

Пусть точка t_0 лежит внутри интервала Δ или на его границе. Говорят, что комплексная функция $f(t)$ при $t \rightarrow t_0$ *стремится* к комплексному числу l , если $|f(t) - l| \rightarrow 0$. В этом случае пишут

$$f(t) \rightarrow l \quad \text{при} \quad t \rightarrow t_0.$$

Как и в вещественном случае, число l называют *пределом* функции $f(t)$ при $t \rightarrow t_0$ и обозначают его прежним символом:

$$l = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t).$$

42. Докажите, что функция $f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$ при $t \rightarrow t_0$ стремится к числу $l = l_1 + i l_2$ тогда и только тогда, когда $f_1(t) \rightarrow l_1$

и $f_2(t) \rightarrow l_2$ при $t \rightarrow t_0$. Таким образом,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) + i \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t).$$

43. Перенесите на комплексные функции все известные вам арифметические правила предельного перехода.

Если $t_0 \in \Delta$ и $f(t) \rightarrow f(t_0)$ при $t \rightarrow t_0$, функцию $f(t)$ называют *непрерывной* в точке $t = t_0$.

44. Докажите, что непрерывность комплексной функции равносильна непрерывности ее вещественной и мнимой частей.

45. Сформулируйте и докажите комплексные версии теорем об арифметических операциях над непрерывными функциями и теоремы о непрерывности сложной функции.

Комплексную функцию $f(t)$ считают *дифференцируемой* в точке t , если она определена в этой точке и существует предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Этот предел называют *производной* функции $f(t)$ в точке t и обозначают любым из символов

$$f'(t) \quad \text{или} \quad \frac{df(t)}{dt}.$$

46. Докажите, что функция $f(t)$ дифференцируема в том и только том случае, когда дифференцируемы ее вещественная и мнимая части $f_1(t)$ и $f_2(t)$. При этом $f'(t) = f'_1(t) + i f'_2(t)$.

47. Перенесите на комплексные функции известные вам правила дифференцирования: арифметические правила и формулу производной сложной функции.

48. Докажите, что комплексная функция, имеющая нулевую производную в каждой точке некоторого интервала, постоянна на нем.

Если функция $F(t)$ дифференцируема в каждой точке t заданного интервала и $F'(t) = f(t)$, ее называют *первообразной* функции $f(t)$ на этом интервале. Множество всех первообразных данной

функции называют ее *неопределенным интегралом*. Это множество обозначается тем же символом, что и в вещественном случае, и описывается, согласно утверждению задачи 48, прежней формулой:

$$\int f(t) dt = F(t) + C$$

с той лишь разницей, что теперь C означает произвольную *комплексную* константу.

49. Докажите, что функция $F(t) = F_1(t) + iF_2(t)$ служит первообразной функции $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ тогда и только тогда, когда функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$ являются первообразными функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Таким образом,

$$\int [f_1(t) + if_2(t)] dt = \int f_1(t) dt + i \int f_2(t) dt.$$

50. Перенесите на комплексную ситуацию общие методы интегрирования: метод разложения, метод интегрирования по частям и метод замены переменной.

Комплексная экспонента

К числу простейших движений, изучаемых в механике, кроме прямолинейного движения с постоянной скоростью, относится равномерное движение по окружности. Чтобы задать такое движение, нужно для каждого момента времени, выражаемого вещественным числом t , указать соответствующую точку $E(t)$ на окружности, в которой в данный момент находится движущийся объект. Вводя соответствующие единицы измерения для времен и расстояний, мы можем считать, что наша окружность имеет единичный радиус, ее центром служит начало некоторой декартовой системы координат, а движение по ней происходит против часовой стрелки с линейной скоростью, равной единице, и начинается при $t = 0$ в точке с координатами $x = 1$ и $y = 0$. Вся совокупность этих условий позволяет нам выразить закон движения явной формулой. Действительно, за время t наша точка пробежит дугу длины t , а значит, время здесь совпадает с полярным углом. Таким образом, записывая точку плоскости в виде комплексного числа, мы приходим к искомой формуле:

$$E(t) = \cos t + i \sin t.$$

Ясно, что эта функция должна иметь для математики не менее важное значение, чем то, которое имеет для физики описываемое ею движение. В частности, она достойна иметь свое собственное имя и выразительное обозначение, лишенное всякой случайности, которое отражало бы самую суть нашей функции и помогало правильному ходу мысли. Чтобы найти такое обозначение, мы должны прежде изучить основные, внутренние свойства этой функции, которыми она полностью характеризуется.

51. Докажите, что построенная нами функция является, как сказали бы алгебраисты, «гомоморфизмом аддитивной группы вещественных чисел на мультипликативную группу комплексных чисел, по модулю равных единице». Проще говоря, областью значений этой функции служит единичная окружность и, какие бы ни взять вещественные числа s и t , справедливо равенство

$$E(s + t) = E(s) E(t),$$

характерное, как можно заметить, для показательных функций.

52. Докажите, что функция $E(t)$ дифференцируема, а главное — ее производная выражается исключительно красивой и компактной формулой

$$E'(t) = iE(t).$$

Эта формула имеет ясный физический смысл. В самом деле, если мы вспомним геометрическую интерпретацию комплексного умножения, то поймем, что умножение комплексного числа на i означает поворот изображающего его вектора на 90° против часовой стрелки с сохранением его длины. Таким образом, число $iE(t)$ изображается единичным вектором, ортогональным радиусу-вектору точки $E(t)$, и если мы перенесем его начало в соответствующее место на окружности, он будет для нее касательным вектором, направленным именно в ту сторону, куда, очевидно, и смотрит вектор скорости.

53. Докажите, что указанные в предыдущих двух упражнениях свойства функции $E(t)$ однозначно ее определяют. С этой целью возьмите любую функцию переменной t , предполагая, что она удовлетворяет тем же условиям, что и функция $E(t)$, умножьте ее на $E(-t)$ и продифференцируйте произведение. Если вы проявите

должное внимание и минимальную наблюдательность, а еще учтите, что функция с тождественно нулевой производной постоянна, вы увидите, что исследуемая вами функция равна $E(t)$.

Теперь уже не остается сомнений в том, какой символ должен служить обозначением для комплексной функции, задающей равномерное движение по окружности. Первое из указанных ее свойств дает нам повод вспомнить о показательных функциях, каждая из которых может быть представлена в виде $e^{\alpha t}$ при подходящем выборе числа α . Нам нужно лишь выбрать это число для обсуждаемой ситуации. Но чем является коэффициент α для функции $e^{\alpha t}$ в вещественном случае? Как мы знаем, скорость изменения такой функции в любой момент пропорциональна значению самой функции, а коэффициентом пропорциональности служит именно число α . Учитывая, наконец, формулу для производной функции $E(t)$, мы приходим к абсолютно однозначному выводу — эту функцию следует обозначить символом e^{it} . Итак,

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Эта формула Леонарда Эйлера призвана служить вечным символом неразрывного единства алгебры, геометрии и анализа, напоминающая нам и о том, сколь хрупкая грань отделяет порой воображаемое от действительного... Две другие формулы, эквивалентные ей и нареченные тем же солнечным именем, не менее впечатляющи:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Мы построили сейчас важную «половину» той функции, которую называют комплексной экспонентой, обозначают символом e^z и полной областью определения считают для нее всю плоскость комплексных чисел z . Пока мы говорили о так называемых чисто мнимых значениях переменной z , имеющих нулевую реальную часть. Но эта функция хорошо нам известна и для вещественных значений ее аргумента. Разумеется, вам уже ясно, что для произвольного комплексного числа $z = x + iy$ экспонента, если мы хотим сохранить характерное для нее показательное свойство, должна определяться формулой

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

объединяющей и вещественный случай, и чисто мнимый. В результате мы получаем замечательную функцию комплексной переменной,

обладающую интересными свойствами. В дальнейшем нам предстоит еще не раз встретиться с ней, но уже вскоре она поможет нам в изучении колебаний простейших механических систем. Впрочем, связь комплексной экспоненты и колебаний заранее очевидна: если точка равномерно вращается вдоль окружности, — а это значит, что ее движение описывается комплексной экспонентой, — то ее проекции на оси координат совершают гармонические колебания.

54. Пусть точка движется по окружности $x^2 + y^2 = 1$ против часовой стрелки с угловой скоростью ω . Докажите, что проекция точки на любую прямую совершает гармонические колебания. Найдите формулу этих колебаний, считая, что прямая лежит в плоскости (x, y) , ее направляющий вектор имеет координаты (A, B) , а за начало отсчета на прямой берется проекция на нее центра окружности.

55. Докажите, что комплексная экспонента обладает основным свойством показательных функций:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

56. Мог ли кто-нибудь из вас еще вчера даже подумать, что экспонента — периодическая функция? Между тем, это действительно так — ее периодом служит, как вы легко теперь убедитесь, чисто мнимое число $2\pi i$. В частности,

$$e^{2\pi i} = 1.$$

57. Докажите, что комплексная экспонента принимает все комплексные значения, кроме нуля. Более того, каждое ненулевое значение она принимает бесконечно много раз, как и положено периодической функции. Таким образом, логарифмическая функция, обратная к экспоненте, определена теперь всюду, кроме нуля, но, в отличие от ее вещественного прообраза, является функцией многозначной. Найдите, например, все значения логарифма от минус единицы.

58. Докажите, что для любого комплексного числа λ дифференцирование функции $e^{\lambda t}$ сводится к ее умножению на λ , а именно:

$$\frac{d e^{\lambda t}}{d t} = \lambda e^{\lambda t}.$$

Таким образом, если $\lambda \neq 0$, то

$$\int e^{\lambda t} dt = \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} + C.$$

59. Как вы только что убедились, функция $z = e^{\lambda t}$ является решением дифференциального уравнения $\dot{z} = \lambda z$. Докажите, что все решения этого уравнения описываются формулой $z = C e^{\lambda t}$, где C означает произвольную комплексную постоянную.

60. Рассмотрим дифференцируемую комплексную функцию $A(t)$ вещественной переменной t . Докажите, что тогда функция $e^{A(t)}$ также дифференцируема и ее производная вычисляется по той же формуле, что и в вещественном случае:

$$\frac{d e^{A(t)}}{dt} = A'(t) e^{A(t)}.$$

Теперь мы можем описать все комплексные решения общего линейного дифференциального уравнения

$$\dot{z} = a z + b,$$

где $a = a(t)$ и $b = b(t)$ означают заданные комплексные функции, определенные и непрерывные для всех значений вещественной переменной t из некоторого интервала Δ . А именно, выбрав любую точку $t_0 \in \Delta$ и произвольное комплексное число z_0 , покажем, что существует единственное решение $z = z(t)$ нашего уравнения, определенное на всем интервале Δ и удовлетворяющее условию $z(t_0) = z_0$.

С этой целью найдем на интервале Δ первообразную $A(t)$ непрерывной функции $a(t)$ и заметим, что любая дифференцируемая на Δ функция $z = z(t)$, согласно утверждениям задач 57 и 60, может быть представлена в виде $z(t) = C(t) e^{A(t)}$. Опираясь на утверждение задачи 60, мы легко убеждаемся, что в терминах функции $C(t)$ исходное дифференциальное уравнение, как и в изученном нами вещественном случае, упрощается до предела:

$$C'(t) = b(t) e^{-A(t)}.$$

Все решения этого уравнения выражаются интегралом от его правой части, тоже представляющей собой непрерывную на Δ функцию.

При этом, какое бы ни взять комплексное число c_0 , найдется ровно одно из этих решений, для которого $C(t_0) = c_0$. Нам остается заметить, что условие $z(t_0) = z_0$ эквивалентно предыдущему равенству, где роль c_0 играет число $z_0 e^{-A(t_0)}$.

61. Выразите «в квадратурах» общее решение дифференциального уравнения $\dot{z} = \lambda z + f(t)$, где λ — произвольное комплексное число, а $f(t)$ — заданная непрерывная комплекснозначная функция.

62. Найдите все решения следующих трех линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$(a) \dot{z} = iz + e^{-it}; \quad (б) \dot{z} = -iz + e^{it}; \quad (в) \dot{z} = iz + e^{it}.$$

Укажите решения $z = z(t)$, удовлетворяющие условию $z(0) = 0$.

Линейные уравнения второго порядка

Дифференциальным уравнением *второго порядка*, разрешенным относительно старшей производной, называют уравнение вида

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}),$$

где f означает функцию трех переменных. Его *решением* считают любую дважды дифференцируемую функцию $x = x(t)$, которая задана на некотором числовом интервале и в каждый момент t удовлетворяет двум условиям: во-первых, точка $(t, x(t), \dot{x}(t))$ принадлежит той области трехмерного пространства, где определена функция f , а во-вторых, $\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t))$.

63. Найдите все «непродолжаемые» решения дифференциального уравнения второго порядка $\ddot{x} = f(t)$, полагая:

$$(a) f(t) = 1; \quad (б) f(t) = t; \quad (в) f(t) = t^2; \quad (г) f(t) = \sin t.$$

Укажите, какие из этих решений $x = x(t)$ удовлетворяют условию $x(0) = 0$. Среди них найдите решения, для которых $\dot{x}(0) = 1$.

Эти примеры и полученные вами результаты имеют простой механический смысл: чтобы по известному ускорению материальной точки полностью восстановить закон ее движения, нужно знать не только начальное положение, но еще и начальную скорость. Естественно, что и в общем случае задача Коши для уравнения второго

порядка ставится следующим образом: для заданной тройки чисел (t_0, x_0, x_1) найти решение $x = x(t)$ изучаемого уравнения, удовлетворяющее условиям $x(t_0) = x_0$ и $\dot{x}(t_0) = x_1$.

В свое время мы убедимся, что для достаточно «хороших» уравнений задача Коши однозначно разрешима при любых начальных условиях, для которых эта задача имеет смысл. Например, «хорошим» является линейное уравнение

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f,$$

где a, b и f означают непрерывные функции одной переменной, заданные на некотором числовом интервале Δ . Как можно доказать, какую бы ни взяли точку $t_0 \in \Delta$ и два совершенно произвольных числа x_0 и x_1 , существует ровно одно решение $x = x(t)$ нашего уравнения, которое определено для всех значений t из интервала Δ и удовлетворяет условиям $x(t_0) = x_0$ и $\dot{x}(t_0) = x_1$.

Ровно так же обстоят дела и с комплексными линейными уравнениями второго порядка

$$\ddot{z} + a\dot{z} + bz = f,$$

где a, b и f означают тоже непрерывные функции одной переменной, заданные на некотором числовом интервале Δ , но имеющие право принимать комплексные значения. Понятие решения такого уравнения определяется точно так же как и в вещественном случае, аналогично ставится и задача Коши, только теперь значения решения, как и начальные условия, представляют собой комплексные числа. Сформулированная только что теорема «существования и единственности» сохраняет силу и в комплексной ситуации.

64. Убедитесь в том, что множество всех функций, определенных на заданном интервале, является линейным, или векторным, пространством по отношению к обычным операциям сложения функций и умножения их на числа. Проверьте также, что все дифференцируемые на том же интервале функции образуют его линейное подпространство. Еще меньшее подпространство составляют все дважды дифференцируемые функции.

Разумеется, если речь идет о вещественных функциях, то здесь имеются в виду линейные пространства над полем вещественных чисел, если же мы говорим о комплексных функциях, то они образуют линейные пространства над комплексным полем.

Определим дифференциальный оператор D как отображение, которое каждой дважды дифференцируемой на интервале Δ функции $u = u(t)$ ставит в соответствие некую новую функцию по правилу

$$D(u) = \frac{d^2u}{dt^2} + a \frac{du}{dt} + b u.$$

65. Докажите, что оператор D линеен, а именно: для любых дважды дифференцируемых на Δ функций u_1 и u_2 , а также для произвольных чисел c_1 и c_2 справедливо равенство

$$D(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 D(u_1) + c_2 D(u_2).$$

Линейность оператора D приводит, очевидно, к тому, что множество всех решений u однородного уравнения $D(u) = 0$ является линейным пространством.

66. Фиксируем в интервале Δ точку t_0 . Учитывая высказанное выше утверждение о разрешимости задачи Коши для уравнения $D(u) = 0$, найдем два его решения u_1 и u_2 , из которых первое удовлетворяет условиям $u_1(t_0) = 1$ и $\dot{u}_1(t_0) = 0$, а второе — условиям $u_2(t_0) = 0$ и $\dot{u}_2(t_0) = 1$. Опираясь на теорему единственности, докажите, что эти два решения u_1 и u_2 образуют базис в пространстве всех решений u уравнения $D(u) = 0$.

Таким образом, размерность пространства всех решений линейного однородного уравнения второго порядка равна двум. Полезно подчеркнуть, что для построения всех решений вовсе не обязательно искать те два решения, о которых говорилось в предыдущей задаче. В самом деле, если мы найдем другую пару линейно независимых решений u_1 и u_2 , то они, как известно из курса линейной алгебры, тоже составят базис в пространстве всех решений, а тогда все эти решения u описываются формулой $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$, где в качестве c_1 и c_2 можно взять произвольные числа, вещественные или комплексные — это зависит от постановки исходной задачи.

67. Пусть z_* означает какое-нибудь «частное» решение неоднородного уравнения $D(z) = f$. Докажите, что тогда все решения z этого уравнения описываются формулой $z = z_* + u$, где в качестве u берется произвольное решение однородного уравнения $D(u) = 0$.

Таким образом, для описания всех решений уравнения $D(z) = f$ нужно найти всего лишь одно частное его решение z_* и два линейно

независимых решения u_1 и u_2 однородного уравнения $D(u) = 0$, и тогда общее решение z исходного уравнения представляется в виде комбинации $z = z_* + c_1 u_1 + c_2 u_2$, где c_1 и c_2 — любые числа.

69. Еще одно простое и важное свойство линейных уравнений выражает так называемый *принцип суперпозиции*: если $f = f_1 + \dots + f_n$, и для каждого $k = 1, \dots, n$ мы нашли функцию z_k , удовлетворяющую уравнению $D(z_k) = f_k$, то сумма $z = z_1 + \dots + z_n$ будет решением уравнения $D(z) = f$. Докажите это утверждение.

Факторизация дифференциальных операторов

Простой и важный класс уравнений составляют линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Так называют уравнения вида

$$\ddot{x} + a \dot{x} + b x = f(t),$$

где коэффициенты a и b постоянны, а функция $f(t)$ определена на некотором числовом интервале. Мы будем считать ее непрерывной.

Такие уравнения возникают, например, при изучении колебаний различных механических систем. В этом случае искомая функция $x(t)$ описывает изменение положения движущейся материальной точки. Намного более мощным источником подобных уравнений служит теория электрических цепей. Здесь $x(t)$ может означать, скажем, силу тока на том или ином участке цепи. Таким образом, обычно — по смыслу той или иной прикладной задачи — все параметры и переменные, участвующие в уравнении, принимают вещественные значения. Но и в этом случае нередко бывает полезно исследовать и комплексные решения — они, как правило, имеют более простой вид, а кроме того, из них можно сконструировать и любые вещественные решения. Как мы сейчас увидим, линейные уравнения с постоянными коэффициентами интегрируются в квадратурах. Мы обсудим прежде комплексный вариант этой маленькой, но симпатичной, теории.

Итак, пусть нам даны два комплексных числа a и b , а также непрерывная комплексная функция $f(t)$. Найдем все комплексные решения $z = z(t)$ уравнения $D(z) = f(t)$, где D — знакомый нам дифференциальный оператор:

$$D(z) = \ddot{z} + a \dot{z} + b z.$$

Свяжем с этим оператором его так называемый характеристический многочлен $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$. В поле комплексных чисел он всегда

может быть представлен в виде $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$. Каждому из линейных множителей отвечает свой дифференциальный оператор D_k первого порядка, действующий по правилу

$$D_k(z) = \dot{z} - \lambda_k z.$$

70. Докажите, что оператор D разлагается в произведение операторов D_1 и D_2 , а точнее — является их суперпозицией:

$$D = D_1 D_2 = D_2 D_1.$$

Таким образом, полагая $w = D_2(z)$, мы можем интересующее нас уравнение $D(z) = f$ записать в виде $D_1(w) = f$. Теперь, чтобы найти все решения z исходного уравнения, мы находим прежде все решения w линейного уравнения первого порядка

$$\dot{w} = \lambda_1 w + f,$$

а затем для любой из возникших у нас функций $w = w(t)$, решаем еще одно подобное уравнение

$$\dot{z} = \lambda_2 z + w.$$

Поскольку с решением линейных уравнений первого порядка у нас уже нет никаких проблем, то мы легко справимся и с двумя такими уравнениями. Если же нам нужно найти решение $z = z(t)$ уравнения $D(z) = f$, удовлетворяющее условиям $z(t_0) = z_0$ и $\dot{z}(t_0) = z_1$, мы найдем сначала то единственное решение $w = w(t)$ уравнения $D_1(w) = f$, для которого $w(t_0) = \dot{z}(t_0) - \lambda_2 z(t_0) = z_1 - \lambda_2 z_0$, а вслед за ним — решение $z = z(t)$ уравнения $\dot{z} = \lambda_2 z + w$, удовлетворяющее условию $z(t_0) = z_0$. Тем самым второе условие $\dot{z}(t_0) = z_1$, как легко видеть, автоматически будет обеспечено.

71. Предположим, что коэффициенты оператора D и функция $f(t)$ вещественны. Докажите, что при этих обстоятельствах комплексная функция $z(t) = x(t) + i y(t)$ является решением уравнения $D(z) = f$ тогда и только тогда, когда его вещественная часть x удовлетворяет тому же уравнению $D(x) = f$, а мнимая часть y служит решением соответствующего однородного уравнения $D(y) = 0$.

72. У вещественного уравнения характеристический многочлен тоже вещественный, но корни его вполне могут оказаться комплексными. Если, тем не менее, мы будем искать решение уравнения методом факторизации, задавшись вещественными начальными условиями, то после первого шага у нас появятся комплексные функции, но после второго шага все «мнимое» исчезнет, и мы получим искомого вещественное решение с нужными начальными условиями. Докажите это, опираясь на теорему существования и единственности, справедливую как в комплексном, так и вещественном вариантах.

73. Проследите за действием описанного в предыдущей задаче «механизма о веществлении» на примере следующих двух задач Коши, решая их методом факторизации:

$$(а) \ddot{x} + x = 0; \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0;$$

$$(б) \ddot{x} + x = 0; \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

74. Методом факторизации найдите все вещественные решения $x = x(t)$ следующих уравнений:

$$(а) \ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0; \quad (б) \ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 1; \quad (в) \ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = t.$$

Укажите решения, удовлетворяющие условию $x = \dot{x} = 0$ при $t = 0$.

75. Обобщая метод факторизации, решите уравнение третьего порядка $\ddot{\ddot{x}} + \ddot{x} - \dot{x} - x = f(t)$, полагая

$$(а) f(t) = 1; \quad (б) f(t) = e^t; \quad (в) f(t) = e^{-t}.$$

В каждом из трех вариантов найдите решения, удовлетворяющие условиям $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$ при $t = 0$.

Формулы свободных колебаний.

Возможность факторизации любого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами означает, что мы без особых усилий можем выразить в квадратурах все решения такого уравнения, если нам известны корни его характеристического многочлена. Если порядок уравнения равен двум, то упомянутые корни легко выражаются «в радикалах» через коэффициенты дифференциального оператора. Но не хочется каждый раз проходить все

этапы факторизации, чтобы получить ответ, который порой — при известной сноровке — очевиден заранее. Чтобы он действительно был нам очевиден, нужно усвоить совсем немного. Это «немногое» мы теперь и обсудим.

Прежде всего мы найдем явные формулы для всех комплексных решений $u = u(t)$ однородного уравнения $D(u) = 0$, где D означает дифференциальный оператор второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами a и b , действующий на любую дважды дифференцируемую функцию u по правилу $D(u) = \ddot{u} + a\dot{u} + bu$. Как мы видели выше, с каждым таким оператором полезно связать квадратный многочлен $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$.

76. Проверьте следующие три формулы:

$$(a) D(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} p(\lambda);$$

$$(б) D(te^{\lambda t}) = e^{\lambda t} [tp(\lambda) + p'(\lambda)];$$

$$(в) D(t^2 e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} [t^2 p(\lambda) + 2tp'(\lambda) + p''(\lambda)].$$

1-й случай. Пусть характеристический многочлен p имеет два различных корня λ_1 и λ_2 . Тогда, как показывает формула (а) предыдущей задачи, функции

$$u_1 = e^{\lambda_1 t} \quad \text{и} \quad u_2 = e^{\lambda_2 t}$$

являются решениями уравнения $D(u) = 0$. Легко видеть, что эти функции линейно независимы. Таким образом, они составляют базис в двумерном пространстве решений u однородного уравнения $D(u) = 0$, так что все эти решения описываются формулой

$$u = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

где c_1 и c_2 могут быть любыми комплексными числами.

2-й случай. Рассмотрим теперь ту редкую, но вполне возможную, ситуацию, когда многочлен p имеет один корень λ_* кратности два. Это значит, что не только $p(\lambda_*) = 0$, но и $p'(\lambda_*) = 0$. Как показывают формулы (а) и (б) последней задачи, решениями уравнения $D(u) = 0$ в таком случае служат функции

$$u_1 = e^{\lambda_* t} \quad \text{и} \quad u_2 = te^{\lambda_* t}.$$

Очевидно, эти две функции также линейно независимы, а значит, общее решение u уравнения $D(u) = 0$ представляет собой их линейную комбинацию:

$$u = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda_* t}$$

с любыми комплексными коэффициентами c_1 и c_2 .

77. Придите к тем же формулам, решая линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами методом факторизации.

78. Как мы видим, решение уравнений обсуждаемого класса по существу сводится к вычислению корней соответствующего многочлена. Тем не менее, поупражняйтесь в этом, решив, например, следующие уравнения:

$$(a) \ddot{u} + 4u = 0; \quad (b) \ddot{u} + 4\dot{u} = 0; \quad (d) \ddot{u} + 4\dot{u} + 4u = 0;$$

$$(б) \ddot{u} - 4u = 0; \quad (г) \ddot{u} - 4\dot{u} = 0; \quad (e) \ddot{u} - 4\dot{u} + 4u = 0.$$

Найдите решения этих уравнений, для которых $u(0) = 0$ и $\dot{u}(0) = i$.

Теперь мы получим явные формулы вещественных решений x того же однородного уравнения $D(x) = 0$ в предположении, что его коэффициентами a и b служат вещественные числа.

1-й случай. Если характеристический многочлен p имеет два различных вещественных корня λ_1 и λ_2 , то найденные выше две линейно независимые функции

$$x_1 = e^{\lambda_1 t} \quad \text{и} \quad x_2 = e^{\lambda_2 t}$$

являются вещественными решениями нашего уравнения, так что все остальные его решения исчерпываются их линейными комбинациями

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

с произвольными вещественными коэффициентами c_1 и c_2 .

2-й случай. Если многочлен имеет один вещественный корень λ_* кратности два, то ответ нам тоже известен: поскольку функции

$$x_1 = e^{\lambda_* t} \quad \text{и} \quad x_2 = t e^{\lambda_* t}$$

удовлетворяют уравнению $D(x) = 0$, линейно независимы и вещественны, то общий вид остальных вещественных решений x описывается комбинациями

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda_* t}$$

с любыми вещественными коэффициентами c_1 и c_2 .

3-й случай. Нам осталось рассмотреть случай, когда хотя бы один из корней λ_1 характеристического многочлена по-настоящему комплексный. Но тогда, поскольку многочлен имеет вещественные коэффициенты, другим его корнем будет комплексно-сопряженное к λ_1 число λ_2 . Итак, эти корни имеют вид

$$\lambda_1 = \sigma + i\omega, \quad \lambda_2 = \sigma - i\omega,$$

где σ и ω означают некоторые вещественные числа, причем $\omega \neq 0$. Таким образом, многочлен имеет два разных комплексных корня, а значит, все комплексные решения изучаемого уравнения являются комплексными линейными комбинациями функций

$$u_1 = e^{\lambda_1 t} = e^{\sigma t} e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad u_2 = e^{\lambda_2 t} = e^{\sigma t} e^{-i\omega t}.$$

Среди этих комбинаций есть две особенно для нас интересные:

$$x_1 = \frac{e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}}{2} = e^{\sigma t} \cos \omega t \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{2i} = e^{\sigma t} \sin \omega t.$$

Нетрудно понять, что функции x_1 и x_2 линейно независимы, так что все вещественные решения x уравнения $D(x) = 0$ описываются формулой

$$x = e^{\sigma t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t),$$

где коэффициенты A и B могут принимать любые вещественные значения.

79. Найдите все вещественные решения уравнений предыдущей задачи. Решите еще несколько уравнений

$$(a) \ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0; \quad (b) \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0;$$

$$(б) \ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0; \quad (г) \ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0.$$

Представьте себе массивный шарик, нанизанный на ось и прикрепленный к одному концу пружинки Гука, у которой другой конец фиксирован. Пусть $x = x(t)$ означает отклонение шарика от положения равновесия в момент t . Движение шарика определяется действием на него двух сил: силы упругости пружины $F_{\text{упр}}$, которая пропорциональна отклонению и направлена в обратную сторону, так что имеет вид $F_{\text{упр}} = -kx$, где $k > 0$, и, возможно, силы трения $F_{\text{тр}}$, которую мы будем считать пропорциональной скорости движения и направленной против нее, так что $F_{\text{тр}} = -c\dot{x}$, где $c \geq 0$. По закону Ньютона, ускорение \ddot{x} , которое сообщает шарика суммарная сила, определяется из равенства $m\ddot{x} = F_{\text{упр}} + F_{\text{тр}}$, где $m > 0$ и означает массу шарика. Таким образом, движение шарика — в каком бы месте и с какой бы скоростью оно ни начиналось — описывается дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0.$$

80. Исследуйте зависимость характера движения шарика от соотношений между его массой, коэффициентом трения и жесткостью пружины. Опишите все возможные типы движений. Убедитесь, что движение шарика порою вовсе не похоже на колебания. Сколько раз в этом случае шарик может пройти через положение равновесия? Какова дальнейшая его судьба? Выясните, когда колебания будут затухающими, а когда — гармоническими. Какова их частота и амплитуда, от чего это зависит? Выясните, что будет с шариком, если пружина бесконечно слабая, а скольжение вдоль оси идеально. Словом, проявите себя настоящим исследователем, которому все интересно и все доступно. Для каждого типа движения нарисуйте график. Дайте физическую интерпретацию полученным вами результатам.

Формулы вынужденных колебаний.

Если левая часть дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t),$$

описывающего колебания той или иной системы, определяется особенностями конструкции самой системы, то правую его часть можно интерпретировать как дополнительную, внешнюю силу, действующую на систему «со стороны». Эта сила обычно меняется со временем, и особый интерес представляет тот случай, когда ее изменение носит периодический характер. В свое время вы узнаете, что

практически любая периодическая функция может быть представлена в виде суммы ряда, составленного из гармоник с соизмеримыми частотами. Если отказаться от условия соизмеримости частот, мы придем к еще более широкому и важному классу функций, которые называются почти-периодическими и обладают исключительно интересными свойствами. Как правило, «высокие» гармоники оказывают незначительное воздействие на систему, и если пренебречь их влиянием, то внешняя сила будет выражаться конечной суммой отдельных гармоник. Если мы еще вспомним о принципе суперпозиции, характерном для линейных систем, то поймем, сколь важно научиться решать и исследовать уравнения вида

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = A_0 \cos \omega_0 t + B_0 \sin \omega_0 t.$$

Поскольку однородные уравнения мы уже умеем решать, нам остается лишь указать какое-нибудь одно, частное, решение обсуждаемого неоднородного уравнения. Прежде мы решим эту задачу в более простом комплексном варианте, и даже слегка обобщим ее. А именно, пусть D означает прежний наш дифференциальный оператор второго порядка с постоянными — и возможно — комплексными коэффициентами a и b . Возьмем два произвольных комплексных числа C_0 и λ_0 и найдем частное комплексное решение $z_* = z_*(t)$ уравнения

$$D(z_*) = C_0 e^{\lambda_0 t}.$$

Подчеркнем еще раз, что для нас давно уже не проблема решить любую подобную задачу. Метод факторизации, изложенный выше, позволяет получить явные решения намного более общих уравнений. Наша задача лишь в том, чтобы указать более короткий путь к решению в некоторых специальных, но часто встречающихся случаях.

Итак, возвращаясь к нашему комплексному уравнению, заметим, что вид его решений существенно зависит от взаимоотношений параметра λ_0 с корнями λ_1 и λ_2 характеристического многочлена p оператора D .

1-й случай. Пусть $\lambda_0 \neq \lambda_1$ и $\lambda_0 \neq \lambda_2$. Иначе говоря, λ_0 не является корнем для p , так что $p(\lambda_0) \neq 0$.

81. Опираясь на формулу (а) задачи 76, докажите, что в этом случае одним из решений нашего уравнения будет функция

$$z_* = C e^{\lambda_0 t}, \quad \text{где} \quad C = \frac{C_0}{p(\lambda_0)}.$$

2-й случай. Пусть $\lambda_0 = \lambda_1$, но $\lambda_0 \neq \lambda_2$. Иначе говоря, λ_0 является простым корнем для p , так что $p(\lambda_0) = 0$, но $p'(\lambda_0) \neq 0$.

82. Применяя формулу (б) задачи 76, докажите, что в этом случае одним из решений нашего уравнения будет функция

$$z_* = C t e^{\lambda_0 t}, \quad \text{где} \quad C = \frac{C_0}{p'(\lambda_0)}.$$

3-й случай. Пусть $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$. Иначе говоря, λ_0 является кратным корнем многочлена p , так что $p(\lambda_0) = p'(\lambda_0) = 0$. Между тем, как можно заметить, $p''(\lambda_0) \neq 0$.

83. Воспользовавшись теперь формулой (в) задачи 76, докажите, что в этом, исключительно редком случае, представляющем разве что академический интерес, одним из решений нашего уравнения будет функция

$$z_* = C t^2 e^{\lambda_0 t}, \quad \text{где} \quad C = \frac{C_0}{p''(\lambda_0)} = \frac{C_0}{2}.$$

Мы рассмотрели все логически возможные варианты и для каждого из них получили решение неоднородного уравнения. Нам остается прибавить к нему общее решение однородного уравнения. Вид его нам известен, так что комплексная версия задачи исчерпана.

Пусть теперь коэффициенты a и b оператора D снова вещественны, и мы хотим найти вещественное решение x уравнения $D(x) = f(t)$, где функция $f(t)$ также принимает вещественные значения.

84. Рассмотрим комплексную функцию $F(t)$, у которой вещественная часть равна $f(t)$. Докажите, что если комплексная функция $z = z(t)$ удовлетворяет уравнению $D(z) = F(t)$, где D — оператор с вещественными коэффициентами, то ее вещественная часть $x = x(t)$ является решением уравнения $D(x) = f(t)$.

Это простое наблюдение лежит в основе так называемого *метода комплексной амплитуды*, который заключается в следующем. Рассмотрим уравнение, немного более общее, чем в начале раздела:

$$\ddot{x} + a \dot{x} + b x = e^{\sigma_0 t} (A_0 \cos \omega_0 t + B_0 \sin \omega_0 t).$$

Гармонику в правой части уравнения всегда можно, а в нашем случае и полезно, представить в виде

$$A_0 \cos \omega_0 t + B_0 \sin \omega_0 t = R_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где R_0 означает ее *амплитуду*, а φ_0 называют ее *начальной фазой*. Теперь видно, что правая часть нашего уравнения есть вещественная часть комплексной функции

$$R_0 e^{i\varphi_0} e^{(\sigma_0 + i\omega_0)t}.$$

Таким образом, как показывает предыдущее упражнение, имеет смысл найти комплексное решение $z = z(t)$ уравнения $D(z) = C_0 e^{\lambda_0 t}$, где

$$C_0 = R_0 e^{i\varphi_0}, \quad \lambda_0 = \sigma_0 + i\omega_0.$$

Число C_0 называют *комплексной амплитудой*. Как мы видим, модуль этого числа равен амплитуде R_0 , а его аргументом служит начальная фаза φ_0 . Что касается комплексного показателя λ_0 , то его вещественная часть определяется экспоненциальным показателем σ_0 исходной «силовой» функции, а мнимая часть совпадает с частотой ω_0 гармонического множителя. Мы видим, что все четыре параметра, характеризующие действующую на систему внешнюю силу, благополучно устроились на подходящих местах в двух возникших у нас комплексных числах C_0 и λ_0 . Сравнивая теперь число λ_0 с корнями характеристического многочлена p оператора D , мы оказываемся в одной из только что рассмотренных трех ситуаций. Во всех случаях комплексное уравнение имеет частное решение вида $z_* = C t^k e^{\lambda_0 t}$, где k , в зависимости от случая, принимает значения 0, 1 или 2. Чтобы найти его вещественную часть x_* , представляющую собой вещественное решение исходного нашего уравнения, достаточно записать коэффициент C в полярной форме. А именно, если

$$C = R e^{i\varphi}, \quad \text{где } R > 0,$$

то, как легко видеть,

$$x_* = R t^k e^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Интересно, что это решение, кроме возникающего иногда степенного множителя t^k , отличается от силовой функции лишь амплитудой и начальной фазой — экспоненциальный показатель и частота гармонического множителя остались прежними. Если в последней формуле разложить косинус суммы углов, решение x_* запишется в виде

$$x_* = t^k e^{\sigma_0 t} (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t).$$

Нам осталось подвести итоги. Практическое решение уравнения изучаемого вида сводится к следующим действиям.

Первое. Прежде всего, из показателя σ_0 и частоты ω_0 мы формируем комплексное число $\lambda_0 = \sigma_0 + i\omega_0$ и проверяем, является ли оно корнем характеристического многочлена. Если нет, полагаем $k = 0$. Если да, полагаем $k = 1$ или $k = 2$, смотря по тому, простой это корень или двукратный.

Второе. Теперь мы знаем, как выглядит искомое частное решение. Его формула только что была указана. Нам остается подставить это выражение в уравнение и, пользуясь линейной независимостью синуса и косинуса, найти значения коэффициентов A и B . Впрочем, порой бывает проще перейти к комплексной амплитуде, найти комплексное решение, для которого у нас на каждый случай есть простая явная формула, а затем выделить его вещественную часть.

Третье. Последнее, что нужно сделать, это — к полученному частному решению прибавить общее вещественное решение однородного уравнения, вид которого нам также известен. Как мы помним, общее решение содержит два свободных коэффициента, и мы при необходимости всегда можем распорядиться ими так, чтобы удовлетворить любым заранее заданным начальным условиям.

85. Решите дифференциальные уравнения:

$$(a) \ddot{x} + \dot{x} = 1; \quad (b) \ddot{x} + \dot{x} = e^t; \quad (d) \ddot{x} + \dot{x} = e^{-t};$$

$$(б) \ddot{x} - \dot{x} = 1; \quad (г) \ddot{x} - \dot{x} = e^t; \quad (e) \ddot{x} - \dot{x} = e^{-t}.$$

Укажите решения, удовлетворяющие условиям $x(0) = 1$ и $\dot{x}(0) = 0$.

86. Решите еще несколько дифференциальных уравнений:

$$(a) \ddot{x} - x = 1; \quad (b) \ddot{x} - x = e^t; \quad (d) \ddot{x} - x = \cos t;$$

$$(б) \ddot{x} + x = 1; \quad (г) \ddot{x} + x = e^t; \quad (e) \ddot{x} + x = \cos t.$$

Укажите решения, удовлетворяющие условиям $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 1$.

87. Докажите, что среди всех решений уравнения

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 11x = \cos \omega t$$

есть ровно одно периодическое. Убедитесь, что все другие решения быстро к нему стремятся. Таким образом, независимо от начальных условий, описываемые уравнением колебания выходят на определенный периодический режим и далее почти не отличаются от гармонических. Выясните, при какой частоте возбуждающей силы установившиеся колебания будут иметь максимальную амплитуду. Найдите формулу этих колебаний.

88. Теперь наверняка вы готовы провести более подробное исследование гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega^2 x = r_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

находящегося под воздействием внешней гармонической силы. Положительное число ω называют собственной частотой осциллятора, так как собственные его колебания, когда нет внешней силы, имеют именно такую частоту. Убедитесь в этом. Докажите, что при $\omega \neq \omega_0$ существует единственное периодическое решение нашего уравнения. Найдите его. Другие решения, в отличие от предыдущего примера, где было трение, вовсе к нему не стремятся. Они получаются наложением двух гармонических колебаний разной частоты. Играя на компьютере, вы можете убедиться, что здесь встречаются интересные картинки. Обратите внимание, что частота колебаний, описываемых периодическим решением, ровно такая же, как у вынуждающей силы. Интересно, что его начальная фаза совпадает с начальной фазой φ_0 гармонической силы, если $\omega > \omega_0$, и противоположна ей (отличается на π), если $\omega < \omega_0$. Что касается амплитуды периодических колебаний, то она растет, когда частота внешней силы ω_0 приближается к собственной частоте ω , и становится огромной, когда разница между частотами очень мала. Разумеется, вы слышали, что это явление называют *резонансом*. При полном совпадении частот полученная вами формула теряет смысл. Но вы знаете, как найти решения в этом критическом случае. Найдите их, и вы убедитесь, что уравнение уже не имеет периодических решений — все они описывают колебания с переменной амплитудой, которая со временем неограниченно растет. Размах колебаний достигает угрожающих размеров. Система идет вразнос. Синусоида уже не в силах уместиться на экране, и она вырывается за его пределы. Осциллограф, осознав свою полную беспомощность и бесполезность, разрушается, и введение в теорию колебаний на этом заканчивается...

Фазовые портреты двумерных систем

Невероятное количество задач, естественно и постоянно возникающих в разнообразных областях знания, приводит к динамическим системам на плоскости. Характерная черта процессов, моделируемых двумерными динамическими системами, заключается в том, что, во-первых, состояние процесса в каждый момент времени описывается двумя вещественными числами, а во-вторых, скорость развития процесса определяется его состоянием в данный момент. Итак, динамика на плоскости описывается *автономной системой* двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y).\end{aligned}$$

Решением этой системы считается пара дифференцируемых функций $x(t)$ и $y(t)$, которые — при подстановке их в систему вместо переменных x и y — превращают оба уравнения в тождества. Как и ранее, говоря о решениях, мы будем считать, что они определены на максимально возможных для них интервалах. Каждое решение задает *движение на плоскости*, которая в этом случае играет роль фазового пространства системы и называется *фазовой плоскостью*.

Автономные системы допускают простую геометрическую интерпретацию. А именно, правая часть системы определяет векторное поле на фазовой плоскости — к точке (x, y) прикреплен вектор $v(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$. Решить систему — это значит найти все такие движения точки на фазовой плоскости, что всякий раз, когда точка занимает положение (x, y) , ее скорость (\dot{x}, \dot{y}) должна быть равна заданному в этом месте вектору $v(x, y)$. Автономность системы означает, что ее векторное поле не меняется со временем.

Если движение описывается формулами $x = x(t)$ и $y = y(t)$, то эти же уравнения служат параметризацией некоторой линии на фазовой плоскости. Она состоит из всех точек вида $(x(t), y(t))$ и называется траекторией движения. Ее называют еще фазовой линией или фазовой кривой, хотя «кривая» порой может оказаться и абсолютно прямой. Если для автономной системы выполняется теорема существования и единственности, как, например, для полиномиальных систем, то через каждую точку фазовой плоскости проходит ровно одна траектория. Таким образом, вся фазовая плоскость расслаивается на отдельные траектории, и мы получаем фазовый портрет нашей системы.

89. Нарисуйте фазовые портреты простейших систем:

$$(a) \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0; \quad (б) \dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 0;$$

$$(в) \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 1; \quad (г) \dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 1.$$

90. Согласно Ньютону, если на материальную точку не действуют внешние силы, ее ускорение равно нулю. Таким образом, если x означает, например, координату свободной частицы на прямой, то ее движение описывается уравнением $\ddot{x} = 0$. Состояние частицы в каждый момент характеризуется двумя показателями — ее положением x и скоростью $y = \dot{x}$. Целесообразно проследить за динамикой каждого из них. Для этого наше уравнение второго порядка мы заменим системой двух уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = 0.$$

Такова автономная система, выражающая первый закон Ньютона. Постройте фазовый портрет этой системы.

91. Согласно Галилею, ускорение g свободного падения одинаково для всех тел и практически постоянно у поверхности Земли. Таким образом, если x означает высоту тела над Землей, то $\ddot{x} = -g$. Переходя к фазовой плоскости, как в предыдущей задаче, заменим уравнение второго порядка эквивалентной ему системой двух уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g.$$

Нарисуйте фазовый портрет этой динамической системы.

Возвращаясь к рассмотренной выше общей динамической системе на плоскости, предположим, что в некоторой точке (x_0, y_0) векторное поле системы равно нулю, т. е.

$$P(x_0, y_0) = 0 \quad \text{и} \quad Q(x_0, y_0) = 0.$$

Тогда пара постоянных функций $x(t) \equiv x_0$ и $y(t) \equiv y_0$ является, очевидно, решением нашей системы, а вся траектория описываемого им «движения» состоит из одной точки (x_0, y_0) , которую справедливо называют неподвижной, или стационарной, точкой системы. Как и в одномерном случае, эти точки играют важную роль в фазовом портрете динамической системы. Естественно, отметив все неподвижные точки, описать строение сети траекторий вблизи каждой

из них. Вообще говоря, это строение может быть очень сложным, но в большинстве случаев представление о нем дает изучение некоторой упрощенной задачи, тесно связанной с исходной. Дело в том, что очень часто функции P и Q в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) можно с большой точностью аппроксимировать линейными функциями от тех же двух переменных x и y , так что

$$P(x_0, y_0) \approx a(x - x_0) + b(y - y_0),$$

$$Q(x_0, y_0) \approx c(x - x_0) + d(y - y_0).$$

Изучив теперь линейную автономную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x - x_0) + b(y - y_0), \\ \dot{y} &= c(x - x_0) + d(y - y_0), \end{aligned}$$

мы можем надеяться, что вблизи точки (x_0, y_0) ее фазовый портрет отражает важнейшие черты фазового портрета первоначальной нелинейной системы. Эти надежды обычно оправдываются в полной мере, хотя бывают и исключения. Таким образом, ясно, насколько важны линейные системы уравнений с постоянными коэффициентами, и замечательно, что все они могут быть исследованы до конца. Для этого нужны лишь элементарные средства линейной алгебры, относящиеся к матрицам второго порядка — их собственные значения и собственные векторы, а в иных случаях еще и жорданова нормальная форма. Все эти вопросы в свое время будут подробно рассмотрены в отдельном курсе, посвященном дифференциальным уравнениям. Пока же ваша задача — на простейших примерах, доступных вам уже сегодня, познакомиться с некоторыми типичными картинками и обогатить себя навыками их построения. Все это пригодится вам уже в текущем, первом, семестре при изучении физики.

92. Явно решая соответствующие линейные уравнения, опишите все траектории и постройте из них фазовые портреты следующих «распадающихся» систем, не забыв для каждой траектории указать стрелочкой направление движения вдоль нее:

$$(a) \dot{x} = x, \dot{y} = y; \quad (б) \dot{x} = x, \dot{y} = 2y; \quad (в) \dot{x} = x, \dot{y} = 3y;$$

$$(г) \dot{x} = 2x, \dot{y} = 2y; \quad (д) \dot{x} = 3x, \dot{y} = y; \quad (е) \dot{x} = 2x, \dot{y} = y.$$

Как вы видите, единственной неподвижной точкой здесь служит начало координат, и эта точка в рассмотренных случаях называется *узлом*. Все другие точки фазовой плоскости разбегаются от нее по своим траекториям, и узел поэтому называют *неустойчивым*. Если в этих примерах поменять знак векторного поля на противоположный, все точки, напротив, устремятся к неподвижной, которая теперь станет *устойчивым узлом*. Нарисуйте фазовые портреты таких узлов.

93. Изучите еще несколько распадающихся систем и нарисуйте их фазовые портреты:

$$(a) \dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y; \quad (б) \dot{x} = x, \quad \dot{y} = -2y;$$

$$(в) \dot{x} = -x, \quad \dot{y} = y; \quad (г) \dot{x} = -3x, \quad \dot{y} = y.$$

Как вы видите, взяв несколько предыдущих примеров и для каждого из них поменяв знак только у одного уравнения, мы приходим к совершенно иной картине. Почти все траектории, прилетая из бесконечности, где они почти не отличались от одной из полуосей координат, меняют направление и, отдав салют неподвижной точке, которая покоится в начале координат, устремляются к одной из половин другой оси. Только четыре траектории ведут себя иначе — это сами открытые полуоси: две из них, принадлежащие одной оси, отталкиваясь от неподвижной точки разбегаются в разные стороны и устремляются к своим бесконечностям, а две другие, напротив, неограниченно приближаются к началу координат. Эти четыре траектории называют сепаратрисами, поскольку они разделяют собою четыре области фазовой плоскости с разным поведением проходящих в них траекторий. Не забудем, что начало координат — тоже отдельная траектория. Такая неподвижная точка называется *седлом*, а описанное строение фазового портрета называют *гиперболическим*.

94. Нередко оказывается возможным подобрать для системы такую функцию двух переменных, которая принимает постоянное значение на любой траектории. Ее называют тогда «первым интегралом системы». Например, легко найти первые интегралы следующих простых систем:

$$(a) \dot{x} = y, \quad \dot{y} = x; \quad (б) \dot{x} = 4y, \quad \dot{y} = x; \quad (в) \dot{x} = y, \quad \dot{y} = 4x.$$

Так, в первом случае достаточно умножить первое уравнение на x , второе — на y и вычесть результаты. Другие примеры лишь чуть-чуть похитрее. Постройте фазовые портреты этих трех систем. Как называется в этих случаях неподвижная точка системы?

95. Рассмотренные в предыдущем примере системы уже не распадаются, как прежде. Интересно, что будет, если для каждой из них мы поменяем знак только у одного из уравнений. Например, у второго:

$$(a) \dot{x} = y, \dot{y} = -x; \quad (б) \dot{x} = 4y, \dot{y} = -x; \quad (в) \dot{x} = y, \dot{y} = -4x.$$

Применяя предыдущие советы, постройте фазовые портреты этих систем. Выясните, что изменилось бы, если бы мы поменяли знаки не у вторых, а у первых уравнений предыдущей задачи. Полученная вами структура фазового портрета называется *эллиптической*, а неподвижная точка, вокруг которой все вертится, называется *центром*. Если такую систему вывести из состояния равновесия, в ней начинается периодическое движение. Докажите, что периоды этих колебаний не зависят от начальных условий, и определяются лишь параметрами системы. Это общее свойство линейных систем. В нелинейном случае такой эффект тоже наблюдается, хотя и редко. Такие особые системы называют *изохронными*.

96. Рассмотрим еще раз гармонический осциллятор $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, совершающий свободные колебания в соответствии с законом Гука. Если мы, как в задачах 90 и 91, перейдем к фазовой плоскости, чтобы проследить за изменением не только положения частицы x , но и ее скорости $y = \dot{x}$, мы придем к системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2 x.$$

Нарисуйте фазовый портрет этой системы, считая, что $\omega > 0$. Как вы видите, знакомая вам форма эллипса — это символ гармонических колебаний, а отношением его полуосей определяется их частота.

97. Еще один важный тип фазовых портретов иллюстрируют следующие четыре системы:

$$(a) \dot{x} = y - x, \dot{y} = -x - y; \quad (б) \dot{x} = y + x, \dot{y} = -x + y;$$

$$(в) \dot{x} = -y + x, \dot{y} = x + y; \quad (г) \dot{x} = -y - x, \dot{y} = x - y.$$

Для изучения движений в этих системах полезно перейти к полярным координатам, в которых положение точки (x, y) на декартовой плоскости задается указанием ее расстояния ρ от начала координат и угла φ , на который надо повернуть против часовой стрелки положительную полуось абсцисс, чтобы она совместилась с радиусом-вектором данной точки. Ясно, что прежние координаты выражаются через новые по формулам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Выражая теперь, напротив, новые координаты через старые, выясните, как они меняются со временем, когда точка движется вдоль траектории той или иной из приведенных выше систем. Вы увидите, что модуль радиуса-вектора точки экспоненциально растёт или убывает, а его полярный угол меняется равномерно с единичной скоростью, причем в одних системах — по часовой стрелке, в других — против нее. Иначе говоря, траектории имеют форму спиралей, которые в одном направлении закручиваются вокруг неподвижного начала координат, бысто стремясь к нему и уменьшая свои витки, а в другом, — продолжая бесконечные вращения, столь же быстро уходят за пределы любой ограниченной области. Неподвижная точка с таким фазовым портретом называется *фокусом*. По тому же принципу, что и в случае узлов, различают *устойчивые* и *неустойчивые фокусы*.

98. Как вы думаете, какие часто встречающиеся явления описывают движения, происходящие около устойчивого фокуса? Разумеется, это — затухающие колебания. Укажите, какие из рассмотренных в предыдущей задаче систем относятся к этому типу. Исключая одну переменную, например, функцию y , перейдите от этих систем к уравнениям второго порядка и найдите явные формулы затухающих колебаний, совершаемых переменной x . Обратите внимание на то, что во всех случаях формулы для x оказались одинаковыми. Тем не менее, системы различаются направленностью вращений их траекторий. Чтобы понять, за счет чего это достигается, для каждого случая определите по первой координате x фазовой точки вторую координату y .

Консервативная система Ньютона

Если линейные динамические системы допускают исчерпывающее исследование, то теория нелинейных систем, по-видимому, никогда не будет завершена. Она намного сложнее, но зато интереснее и богаче. Здесь мы изучим простой, но очень важный класс нелинейных систем, возникающих во многих задачах механики. Речь пойдет о

системах, поведение которых описывается уравнениями вида

$$\ddot{x} = f(x).$$

Это уравнение имеет понятный физический смысл: точка единичной массы движется по координатной оси в соответствии с законом Ньютона под воздействием силы $f(x)$. Особенностью этого класса задач является независимость силы от скорости, что можно понимать как отсутствие трения в изучаемой системе. Мы уже рассматривали несколько подобных примеров (вспомните задачи 90, 91, 96). Как и там, мы перейдем к фазовой плоскости (x, y) , полагая

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x).$$

В дальнейшем мы считаем для простоты, что функция $f(x)$ всюду определена и дифференцируема. Как можно доказать, в таком случае через каждую точку фазовой плоскости проходит ровно одна траектория. Наша задача — научиться строить фазовые портреты любых таких систем. «Читая» эти портреты, мы сможем описать все движения, которые согласуются с указанным выше уравнением.

99. Чем отличаются в механическом смысле два состояния материальной точки, если они описываются фазовыми точками с одинаковыми первыми координатами и разными вторыми. Что между ними общего?

100. Докажите, что в системе Ньютона движение вдоль отрезка фазовой траектории, лежащего выше оси абсцисс, происходит слева направо, а если он оказался ниже указанной оси, фазовая точка движется по нему в противоположную сторону.

101. Где на фазовой плоскости системы Ньютона располагаются неподвижные точки? Какой физический смысл имеют соответствующие им стационарные решения системы?

102. Докажите, что если функция $x = x(t)$ является решением уравнения $\ddot{x} = f(x)$, то одновременно с ним решением будет и функция $\tilde{x} = x(-t)$. Полагая $y = \dot{x}$ и $\tilde{y} = \dot{\tilde{x}}$, убедитесь, что $\tilde{y} = -y(-t)$. Таким образом, если некоторая линия на фазовой плоскости служит фазовой траекторией системы, то линия, симметричная ей относительно оси абсцисс и направленная в противоположную сторону, тоже является фазовой траекторией нашей системы. По этой причине

говорят, что в изучаемых нами специальных системах возможно «обращение времени». В частности, это означает, что если участок фазовой траектории соединяет две точки оси абсцисс, то полная траектория замкнута и симметрична относительно указанной оси. Получите еще раз все эти выводы, обратив внимание на характерную симметричность векторного поля изучаемой системы. Опишите эту симметрию.

Как показывает утверждение задачи 100, на каждом участке фазовой траектории, лежащем с одной стороны от оси абсцисс, вторая координата y фазовой точки является однозначной функцией первой координаты x . Вид этой функции можно найти, не решая системы. Действительно, на каждом таком участке мы можем получить для искомой функции замечательное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{f(x)}{y}.$$

Замечательно оно тем, что переменные в нем разделяются, и уравнение преобразуется к виду $y dy = f(x) dx$. Таким образом, полагая

$$U(x) = - \int f(x) dx, \quad T(y) = \frac{y^2}{2},$$

мы приходим к следующему важнейшему выводу: на каждой фазовой кривой сумма $E(x, y) = U(x) + T(y)$ принимает постоянное значение.

Первое слагаемое в этой сумме называют *потенциальной энергией* системы, находящейся в состоянии (x, y) , второе — *кинетической энергией*. Сумма потенциальной и кинетической энергий дает *полную энергию* системы. Как мы видим, если фазовая точка, подчиняясь системе Ньютона, движется вдоль фазовой траектории, ее полная энергия с течением времени не меняется — уменьшение одного вида энергии тут же компенсируется адекватным увеличением другого. Иными словами, полная энергия служит первым интегралом системы. Если нас интересует движение, при котором полная энергия имеет заданное значение E , то вид соответствующей фазовой кривой определяется формулой

$$y = \pm \sqrt{2(E - U(x))}.$$

Подчеркнем, что эта формула имеет смысл лишь на тех отрезках оси x , где $U(x) \leq E$. Говоря физическим языком, движение возможно

лишь там, где потенциальная энергия системы не превышает заданного уровня полной энергии. Это связано с тем, что кинетическая энергия, в отличие от потенциальной, всегда неотрицательна.

103. Стоит заметить также, что разные движения в системе вполне могут происходить при одной и той же полной энергии. В этом нет ничего удивительного. Впрочем, докажите, что такие движения, если не считать сдвига по времени, могут быть реализованы только на непересекающихся между собой участках оси абсцисс.

104. Докажите, что первыми координатами точек покоя системы Ньютона служат стационарные, или критические, точки потенциальной энергии. Так называют те точки, где производная данной функции равна нулю.

105. Предположим, что график потенциальной энергии U на некотором участке имеет одну точку минимума x_0 . Постройте по этому графику фазовый портрет соответствующей части системы. Предполагая, что $U''(x_0) > 0$, докажите, что вблизи точки $(x_0, 0)$ фазовый портрет имеет эллиптическую структуру: система совершает почти гармонические колебания, а ее фазовые траектории очень напоминают эллипсы. Найдите полуоси этих «почти-эллипсов», выразив их через энергию колебаний E , ее наименьшее значение $U(x_0)$ и вторую производную функции U в точке x_0 . По этим данным вычислите период и частоту малых колебаний.

106. Пусть теперь график потенциальной энергии U на некотором участке имеет одну точку максимума x_* . Постройте по этому графику фазовый портрет соответствующей части системы. Предполагая, что $U''(x_*) < 0$, докажите, что вблизи точки $(x_*, 0)$ фазовый портрет имеет гиперболическую структуру: почти все близкие к этому состоянию равновесия фазовые точки в итоге разбегаются от него по своим траекториям, напоминающим гиперболы. Найдите параметры этих «почти-гипербол», выразив их через отклонение энергии движения E от критического ее значения $U(x_*)$ и вторую производную функции U в точке x_* . Обратите внимание, что разность $U(x_*) - E$, в отличие от предыдущего случая, здесь может быть не только положительной, но и отрицательной. Выясните механический смысл этого знака и опишите, как он сказывается на характере движения «реальной» точки. Убедитесь, что сепаратрисы, разделяющие окрестность неподвижной точки на четыре области с разным

характером движений, подходят к точке покоя с одинаковыми острыми углами наклона, если считать их с соответствующей стороны. Найдите эти углы, выразив их тангенсы через $U''(x_*)$.

Итак, точке минимума потенциальной энергии отвечает устойчивое состояние равновесия системы — небольшие отклонения от этого состояния приводят лишь к небольшим колебаниям около точки покоя, амплитуда которых тем меньше, чем меньше отклонение. Напротив, точке максимума потенциальной энергии соответствует неустойчивое состояние равновесия системы — сколь угодно малые отклонения от этого состояния, как правило, приводят к разбеганию фазовых траекторий от точки покоя. Исключение составляют две сепаратрисы, по одной слева и справа от неподвижной точки: они стремятся к состоянию покоя с энергией, равной критической.

107. Научитесь по любому графику потенциальной энергии строить полный фазовый портрет. Рассмотрите, например, случаи, когда график имеет: (а) один минимум и один максимум; (б) один минимум и два максимума; (в) два минимума и один максимум.

108. Рассмотрим обычный маятник — грузик, подвешенный на стержне. Докажите, что если маятник отклонить от положения равновесия на угол x , суммарная сила, действующая на грузик, будет направлена в противоположную сторону под прямым углом к стержню, а величина ее будет пропорциональна $\sin x$. Отсюда следует, что при подходящем выборе единиц измерения, плоские колебания маятника описываются уравнением $\ddot{x} + \sin x = 0$. Разумеется, мы рассматриваем здесь идеальный маятник, покачивающийся в идеальных условиях. Естественно, что такой маятник называют математическим. Постройте фазовый портрет математического маятника. Сколько различных типов движений вы видите на этом портрете? Укажите физический смысл каждого из них. Обратите внимание на малые колебания маятника около устойчивого состояния равновесия. Поскольку синус малого угла с высокой точностью почти равен самому углу — первый замечательный предел! — малые колебания здесь фактически описываются знакомым нам уравнением $\ddot{x} + x = 0$. Таким образом, фазовые кривые вблизи точки покоя очень похожи на окружности, а период описываемых ими почти гармонических колебаний почти равен 2π . Докажите это.