В. В. Иванов

Математический анализ

ФФ НГУ, 1 семестр

Конец первого семестра и
— одновременно —
начало многомерного анализа
(не наоборот?)

Дорогие коллеги и (кое во что уже посвящённые) милые дети! На дворе уже декабрь. Скоро Новый Год! Мы снова видим, как быстро течет время. Трудно не согласиться, что декабрь — далеко не сентябрь... Между *тем*, у нас еще одна *тема* — геометрия и топология арифметических пространств, непрерывные отображения, частные производные, многомерная формула Тейлора, квадратичные формы и критерий Сильвестра в теории локального экстремума функций нескольких переменных, в теории, которая позволяет решать массу красивых и полезных задач, где прекрасно сочетаются анализ, алгебра и геометрия... Поэтому скажем иначе — ещё только начало декабря, до Нового Года очень далеко, а изучить-то осталось совсем немного — всего-навсего одну тему.

***

Теперь обращаюсь к нашим юным слушателям. Задачи, которые дальше, были и раньше. Их знают старшие ваши товарищи по ФФ. Мне хотелось сочинить новые, но я посмотрел внимательно на прежние и увидел, что они хороши. Мне стало так обидно за вас, если вы их не узнаете. Решение такое — эти задачи остаются, но не все — обязательные. Можно было поставить звёздочки, которые и в конце семестра, как и в самом его начале, означали бы «для тех, кому делать нечего», но подумал — а что, если кто-то из вас вовсе не прочтёт их. Поэтому звёздочек нет, но вместо них — полный перчень задач, которые никак нельзя не решить...

Задание 8. Дифференцируемые функции нескольких переменных

(сдать в декабре,
желательно — этого года...)

1, 2, 3, 4, 5, 6 (кроме последнего предложения, которое чрезвычайно интересно, если на него обратить внимание, не забыть и вернуться к нему в конце второго семестра, где речь пойдет, в частности, о сферических координатах), 7, 8 (б, в, г), 9, 10, 12 (а, б, в), 13 (б, в, г), 14 (б, в , г), 15 (а, б, в, г). P. S. Преподаватели вправе сократить список, начиная с двенадцатой задачи ...

Спасибо вам!
Вечно ваш, В. В. Иванов

8. Дифференцируемые функции нескольких переменных

1. *Частные производные.* (а) Вычислите частные производные первого порядка и все смешанные производные высших порядков функции

$$u \;=\; \operatorname{arctg}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}.$$

Дайте объяснение полученным результатам. (б) Вычислите все частные производные следующих функций:

$$u \;=\; \frac{x+y}{x-y}; \qquad\qquad u \;=\; xyz\, e^{x+y+z}.$$

2. *Полные дифференциалы.* (а) Найдите первый и второй дифференциалы функции $(y/x)^{1/z}$ в точке $(1,1,1)$. (б) Найдите дифференциалы всех порядков следующих функций:

$$u \;=\; \ln(x+y); \qquad\qquad u \;=\; \ln(x^x y^y z^z);$$

$$u \;=\; \varphi(x)\ \psi(y); \qquad\qquad u \;=\; f(x+y+z),$$

где φ, ψ и f — бесконечно дифференцируемые функции одной переменной.

3. *Дифференцирование сложных функций.* Проверьте равенства, предполагая необходимую гладкость участвующих в них функций:

$$\text{(а)}\;\; x\,\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\,\frac{\partial u}{\partial y}+\beta z\,\frac{\partial u}{\partial z} \;=\; nu, \qquad \text{где}\;\; u \;=\; x^n f\left(\frac{y}{x^\alpha},\frac{z}{x^\beta}\right),$$

$$\text{(б)}\;\; x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \;=\; 0, \quad \text{где}\;\; u \;=\; \varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x\,\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

4. *Производная по направлению.* Если вы оказались на холме $z+x^2+xy+y^2=5,\ z\geq 0,$ в его точке $(1,1,2)$, в каком направлении вам нужно двигаться, чтобы оставаться на одной высоте ? В каком направлении подъем по холму самый крутой ? А спуск ?

5. *Оператор Лапласа* Δ каждую дважды гладкую функцию $u = u\,(x, y, z)$ переводит в новую функцию

$$\Delta u \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;+\; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \;+\; \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Этот дифференциальный оператор играет выдающуюся роль в математике и физике. Чтобы познакомиться с ним пораньше, решите задачи, предлагаемые в этом и следующих двух разделах.

Прежде всего, выясните, как действует оператор Лапласа на сферически симметричные функции, т. е. функции вида $u = f(r)$, где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

а f — дважды гладкая функция одной переменной. Найдите все сферически симметричные гармонические функции, т. е. удовлетворяющие уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.

6. *Преобразованием Кельвина* функции $u = u(x, y, z)$ называют функцию $v = v(x, y, z)$, определяемую формулой

$$v \;=\; \frac{1}{r}\; u\left(\frac{x}{r^2},\; \frac{y}{r^2},\; \frac{z}{r^2}\right).$$

Убедитесь в том, что это преобразование инволютивно, т. е. двукратное его применение приводит к исходной функции. Для примера, найдите v для $u = 1$ и для $u = 1/r$. Докажите, что преобразование Кельвина переводит гармоническую функцию u в гармоническую функцию v.

7. Наряду с переменными $x,\ y,\ z$ рассмотрим другие переменные $q_1,\ q_2,\ q_3,$ связанные с первыми *ортогональным преобразованием.* Докажите равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;+\; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \;+\; \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial {q_1}^2} \;+\; \frac{\partial^2 u}{\partial {q_2}^2} \;+\; \frac{\partial^2 u}{\partial {q_3}^2}.$$

Это значит, что действие оператора Лапласа имеет инвариантный смысл — не зависит от выбора прямоугольных координат.

8. *Локальные экстремумы.* (а) Постройте многочлен четвертой степени от двух переменных, для которого начало координат является точкой строгого локального минимума по любому направлению, но в которой он, тем не менее, не имеет локального экстремума. Что

можно сказать о первом и втором дифференциалах такого многочлена в нуле? Существует ли подобный пример в классе многочленов второй степени? А третьей?

(б) Найдите и исследуйте точки локального экстремума следующих функций двух переменных:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y; \qquad z = (x^2 + y^2)^{xy};$$

(в) Найдите локальные экстремумы функций трех переменных:

$$u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \qquad u = \frac{4}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + 8z^2.$$

(г) Докажите, что непрерывная на всем n-мерном пространстве функция $f(x)$, которая при $||x|| \to \infty$ стремится к $+\infty$, обязательно где-то достигает своего абсолютного минимума, т. е. существует такая точка x_0, что $f(x) \geq f(x_0)$ для всех x.

(д) В дополнение к предыдущему утверждению, постройте пример всюду определенной гладкой функции — пусть от двух переменных — которая по каждой прямой стремится к $+\infty$, но при этом вовсе не имеет стационарных точек и принимает сколь угодно большие отрицательные значения, так что инфимум ее равен $-\infty$. Чтобы лучше представить устройство такой функции, нарисуйте ее линии уровня и опишите рельеф ее графика. Примечание: между прочим, и в этом случае пример можно найти среди многочленов.

9. *Задача Гюйгенса.*

Шар массы M катится со скоростью V прямо на неподвижный шар меньшей массы m. Разумеется, опираясь на законы сохранения импульса и энергии, вы легко посчитаете скорость, которую приобретет легкий шар после абсолютно упругого и абсолютно центрального удара. Убедитесь, что она не может быть больше $2V$. Однако ее можно существенно увеличить, если на пути тяжелого шара поставить несколько дополнительных шаров. Вопрос, известный как задача Гюйгенса, заключается в следующем: каковы оптимальные массы системы n промежуточных шаров, доставляющие максимальную скорость v_n легкому шару, и чему равна эта скорость? Найдите ответ. Кроме того, докажите, что последовательность v_n монотонно растет и стремится к пределу v_*, который удовлетворяет соотношению $mv_*^2 = MV^2$. Таким образом, энергия тяжелого шара при большом n почти полностью передается легкому.

Кстати, импульс ведет себя совершенно иначе. В то время как легкий шар весело летит со скоростью, близкой к v_*, вся вереница остальных, лишившихся энергии, шаров практически неподвижна, а в пределе — буквально стоит на месте. Между тем, она обладает значительным импульсом, который, хотя и убывает с ростом n, стремится вовсе не к нулю, а к некоторому строго положительному пределу P_*. Для вас не составит труда найти его.

Примечание. Этот поучительный пример показывает, что бывает, когда бесконечно малые и бесконечно большие оказываются рядом. Пусть $m_{1,n}, m_{2,n}, \ldots, m_{n,n}$ означают массы оптимальной системы n шаров, расположенные по убыванию, а $v_{1,n}, v_{2,n} \ldots, v_{n,n}$ — их остаточные скорости. Покажите, что для любого фиксированного k справедливы соотношения:

$$\lim_{n\to\infty} m_{k,n} = M, \qquad \lim_{n\to\infty} v_{k,n} = 0.$$

Таким образом, каждое слагаемое в сумме

$$T_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_{k,n}\, v_{k,n}^2$$

стремится к нулю, и может показаться естественным, что $T_n \to 0$. Докажите, что это — верное соотношение. Однако в сумме

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} m_{k,n}\, v_{k,n}$$

каждое слагаемое тоже стремится к нулю. Тем не менее, $P_n \to P_*$, где $P_* > 0$. Убедитесь в этом сами.

10. Пусть гладкая функция $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ определена на открытом множестве, состоящем из целых лучей, исходящих из начала координат. Как вы помните, если функция u *однородна* степени λ, т. е. на каждом из упомянутых лучей

$$u(tx_1, \ldots, tx_n) = t^{\lambda}\, u(x_1, \ldots, x_n),$$

то она удовлетворяет тождеству Эйлера:

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = \lambda\, u(x_1, \ldots, x_n).$$

(а) Докажите обратное утверждение: если функция u удовлетворяет этому тождеству, она однородна степени λ.

(б) Докажите, что дифференцирование однородной функции по любой переменной сохраняет однородность, но понижает ее степень на единицу.

(в) Докажите, что вторые производные дважды гладкой однородной степени λ функции u удовлетворят соотношению:

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i\, x_j\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \;=\; \lambda\,(\lambda-1)\, u(x_1,\, \ldots\, , x_n).$$

11. Вычисление дифференциала функции, зависящей от n переменных $x_1,\, \ldots\, , x_n$, можно представить как действие на нее *линейного дифференциального оператора*

$$d \;=\; \frac{\partial}{\partial x_1}\, dx_1 + \;\ldots\; + \frac{\partial}{\partial x_n}\, dx_n.$$

(а) Если порядок гладкости функции равен или выше k, можно k раз подействовать на нее этим оператором или, что тоже самое, его k-ой степенью. Покажите, что в результате получится ее k-ый дифференциал. Таким образом,

$$d^k \;=\; \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_m}\, dx_m\right)^{k} \;=\; \sum_{m_1,\ldots,m_k=1}^{n} \frac{\partial^k}{\partial x_{m_1}\ldots \partial x_{m_k}}\; dx_{m_1}\ldots dx_{m_k}.$$

(б) В этой сумме много подобных, а точнее — одинаковых, слагаемых. Докажите, что если собрать их вместе, получится формула:

$$d^k \;=\; \sum_{k_1+\ldots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!\ldots k_n!}\; \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1}\ldots \partial x_n^{k_n}}\; dx_1^{k_1}\ldots dx_n^{k_n},$$

где суммирование ведется по всем наборам неотрицательных целых чисел $k_1,\, \ldots\, , k_n$, сумма которых равна k.

(в) Посчитайте, например, дифференциал функции $e^{x_1}\cdot \ldots \cdot e^{x_n}$ на векторе $a = (a_1,\, \ldots\, , a_n)$, сначала — непосредственно, а затем —

с помощью последней формулы. Сравнивая результаты, убедитесь в справедливости равенства

$$(a_1 + \ldots + a_n)^k \ = \sum_{k_1+\ldots+k_n=k} \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!}\, a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n},$$

обобщающего известную вам биномиальную формулу Ньютона.

12. *Открытые и замкнутые множества.*

(а) Докажите, что внутренность множества A представляет собой наибольшее открытое множество, содержащееся в A. Двойственным образом, замыкание множества A является наименьшим замкнутым множеством, содержащим A.

(б) Докажите, что множество открыто тогда и только тогда, когда оно не содержит ни одной своей граничной точки. Напротив, множество замкнуто в том и только том случае, если оно заключает в себе все свои граничные точки.

(в) Докажите, что граница множества всегда замкнута. Может ли она иметь внутренние точки? Может ли граница оказаться шире самого множества?

(г) Если A и B — открытые подмножества арифметических пространств, то их декартово произведение $A \times B$ — тоже открытое множество. То же верно и по отношению к замкнутым множествам. Выясните, справедливы ли обратные утверждения? Опишите границу декартова произведения произвольных множеств.

(д) Множество всех вещественных матриц размера $n \times n$ можно, очевидно, рассматривать как арифметическое пространство размерности n^2, в котором, всего-навсего, принята специальная нумерация координат его элементов. Докажите, что множество всех невырожденных матриц открыто, а множество вырожденных — замкнуто.

13. *Компактные множества.*

Множество в арифметическом пространстве называют *компактным*, если каждая последовательность его элементов имеет частичный предел в этом множестве. Докажите следующие утверждения:

(а) Пересечение убывающей последовательности непустых компактов также является непустым компактом.

(б) Декартово произведение компактных множеств компактно.

(в) Функция, определенная на отрезке числовой прямой, непрерывна на нем тогда и только тогда, когда ее график представляет собой компактное множество на плоскости. Приведите многомерный аналог этого утверждения.

(г) Если компактное множество отображается в себя таким образом, что при этом расстояние между его точками уменьшается, то ровно одна его точка при таком отображении остается неподвижной.

(д) Если компакт покрыт какой-нибудь системой открытых множеств, конечной или бесконечной — все равно, то можно подобрать такое положительное число ε, что любой шар радиуса ε с центром в точке, принадлежащей компакту, целиком содержится хотя бы в одном из открытых множеств покрывающей системы.

14. *Связные множества.*

Множество в арифметическом пространстве мы будем считать *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывным путем, проходящим по этому множеству.

(а) Докажите, что объединение двух не пересекающихся между собой открытых множеств не может быть связным. То же верно и для замкнутых множеств.

(б) Докажите, что любой непрерывный путь, соединяющий какую-либо точку множества с точкой, не принадлежащей ему, обязательно пересекает границу этого множества.

(в) Из плоскости удалили счетное множество точек, т. е. столько, сколько имеется натуральных чисел. Как вы думаете, всегда ли будет связным оставшееся множество? Докажите, что всегда.

(г) Останется ли связным каркас четырехмерного куба, если разрезать три каких-нибудь его ребра?

(д) Связно ли множество всех вещественных невырожденных матриц заданного размера? А комплексных?

15. *Гомеоморфизмы.*

(а) Полоску бумаги, имеющую форму вытянутого прямоугольника, свернули колечком и склеили. Получился *цилиндр*. Другую полоску сначала перекрутили на 180°, а затем тоже склеили. Получился *лист Мебиуса*. Наконец, с третьей полоской сделали то же самое, только перекрутили на 360°. Какие из этих «колец» гомеоморфны, какие — нет, и почему?

(б) Докажите, что операция обращения матрицы является гомеоморфизмом множества невырожденных матриц на себя.

(в) Гомеоморфны ли каркасы куба и тетраэдра? Почему?

(г) Если непрерывное отображение компактного множества взаимно однозначно, то оно является гомеоморфизмом, т. е. обратное отображение также непрерывно.

(д) Вслед за *Пеано*, постройте непрерывное отображение отрезка на квадрат. На весь. Докажите, что такое отображение, как бы вы его ни строили, никогда не бывает взаимно однозначным. Таким образом, отрезок и квадрат не гомеоморфны. Вот так! Если бы не так, то не было бы топологии ... А вот по мощности они совпадают. Спасибо *Ка́нтору* за разъяснение...

***

Дополнение к первой задаче. Найдите формулу, выражающую тангенс суммы

$$\operatorname{tg}(x_1 + ... + x_n)$$

через тангенсы слагаемых:

$$\operatorname{tg} x_1, \ ..., \ \operatorname{tg} x_n.$$

Её, вроде, нигде нет, но она красивая. Там однородные симметричные (или симметрические) многочлены, дроби и альтернированные суммы... Затем перейдите к арктангенсам.

Про оператор Лапласа. Что же он, такой вездесущий и вовсю «инвариантный», вычисляет? Была функция $u = u(x_1, ...x_n)$, а стала

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Что она значит? Может, там средние, Евклид и ... Тейлор?

P. S. Про якобианы, о которых говорилось в программе первого семестра и которые нужны будут во втором семестре на первой лекции по молекулярной физике, сейчас не будем говорить. Успеем...