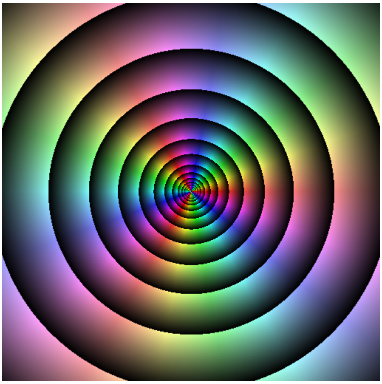
Экспоненциальные зебры

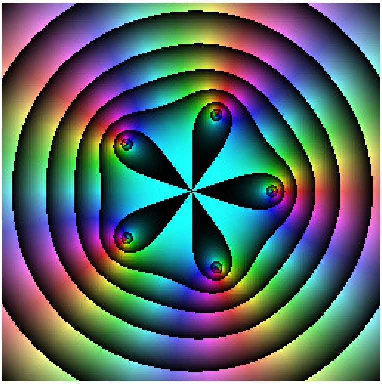
Прекрасный способ визуализации функций комплексной переменной состоит в окраске точек z интересующей области цветами, зависящими от $f(z)$. При этом $\arg f(z)$ обычно отображают радужным оттенком, а для $|f(z)|$ остаются насыщенность и яркость, применяемые по-разному. Скажем, скачки яркости могут показывать линии постоянного модуля. Удачный выбор показываемых значений модуля сильно зависит от типа изображаемых функций.

В этом тексте почти все картинки отрисованы в квадратных окнах

$$-a \leqslant \mathfrak{Re}\, z \leqslant a, \quad -a \leqslant \mathfrak{Im}\, z \leqslant a$$

со скачками яркости вдоль линий с $|f(z)| = e^n$ для целых n. Сейчас возьмём $a = 7$ и сохраним неизменным до явного указания о смене окна, иногда подбирая масштаб умножением z на подходящее положительное число. Например, изобразим функции z^3 и $(z/3)^5 - 1$:

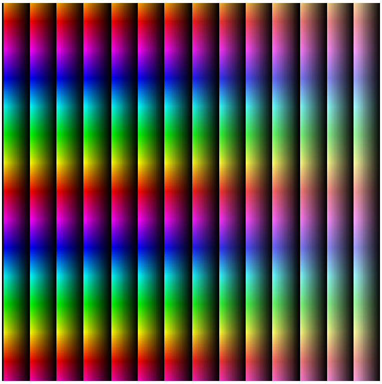


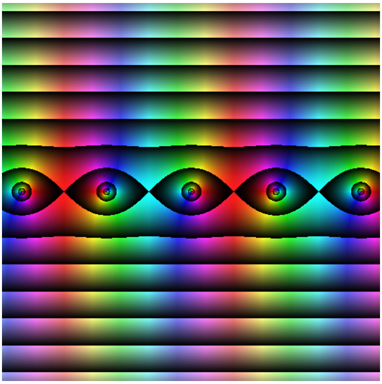


Хочется надеяться, что уже отсюда понятно, как по картинке, сделанной по таким правилам, определить направление роста представленной ею функции. Конкретные значения при этом не видны, но они нам обычно и не будут нужны. Зато сразу бросаются в глаза нули (а также полюса, хотя здесь их и нет), причём порядок каждого виден по количеству оборотов радуги при обходе точки.

Упражнение. *Анализируя картинки, докажите «на пальцах» основную теорему алгебры полиномов: каждый полином степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней, считая кратности. Решение рассказано в методичке по моим лекциям по алгебре 2009 г.*

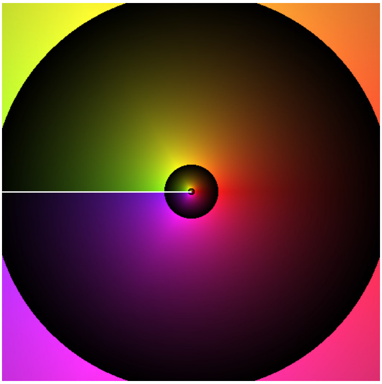
Теперь изобразим функции $\exp z$ и $\sin z$:

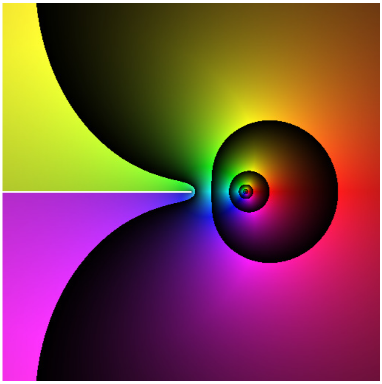




На графике $\sin z$ вдоль синусоид, ограничивающих цепь тёмных «глаз», модуль равен 1, а при удалении от действительной оси модуль слабо зависит от $\mathfrak{Re}\, z$. Запомните эту структуру для сравнения с теми функциями, ради которых написан этот текст. Может быть полезно также задуматься, как разность двух экспонент даёт такую структуру.

Метод применим и для функций, имеющих точки ветвления. При этом цвет обычно меняется скачком у разреза, сделанного для выбора ветви функции. Например, вот графики $\sqrt{z}$ и $\ln \frac{z}{2}$:





Функции Эйри

Одно из простейших по форме дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами — это **уравнение Эйри**

$$y'' - xy = 0.$$

Запишем его общее решение в виде

$$y(x) = c_0 A_0(x) + c_1 A_1(x)$$

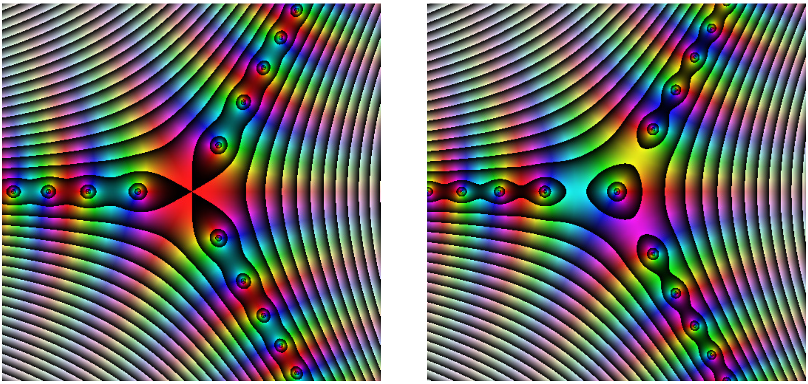
с произвольными постоянными c_k и функциями $A_k(x)$, являющимися решениями задач Коши с начальными условиями

$$A_0(0) = 1, \quad A_0'(0) = 0; \qquad A_1(0) = 0, \quad A_1'(0) = 1.$$

Среди нетривиальных, то есть ненулевых, решений уравнения Эйри элементарных функций нет. Ища решение в виде ряда, легко найдём аналитические представления $A_k(x)$, а на самом деле, функций $A_k(z)$ комплексной переменной z. Ряд для $A_0(z)$ содержит только степени $n = 3m$, а ряд для $A_1(z)$ — только степени $n = 3m + 1$:

$$A_0(z) = 1 + \tfrac{1}{3!}z^3 + \tfrac{1\cdot 4}{6!}z^6 + \tfrac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}z^9 + \ldots,$$
$$A_1(z) = z + \tfrac{2}{4!}z^4 + \tfrac{2\cdot 5}{7!}z^7 + \tfrac{2\cdot 5\cdot 8}{10!}z^{10} + \ldots,$$

поэтому графики этих функций обладают симметриями при повороте плоскости $z \mapsto ze^{2\pi i/3}$, причём отличающимися:

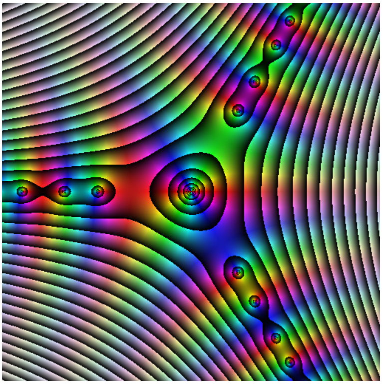


Упражнение. *Напрашивается к рассмотрению третья функция:*

$$A_2(z) = \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{3}{5!}z^5 + \tfrac{3\cdot 6}{8!}z^8 + \tfrac{3\cdot 6\cdot 9}{11!}z^{11} + \ldots.$$

Проверьте, что это частное решение неоднородного уравнения

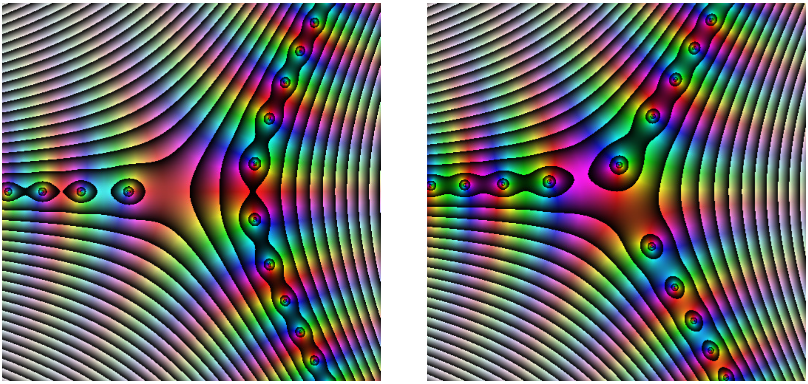
$$y'' - xy = 1.$$



Все нули обоих базисных решений, а также $A_2(z)$, лежат на лучах

$$\{z \mid 3\arg z - \pi \in 2\pi\mathbb{Z}\},$$

среди которых отрицательная действительная полуось. У линейных комбинаций $c_0A_0(z)+c_1A_1(z)$ нули смещены и симметрия при повороте нарушена. Для примера, отрисованы $7A_0 - 5A_1$ и $A_0 + iA_1$:



По виду уравнения Эйри ясно, что на действительной оси у его решений наблюдаются экспоненциальный рост при $x > 0$ и колебания при $x < 0$. Амплитуда колебаний медленно убывает, а частота медленно растёт, хотя эти выводы не вполне непосредственны. Кроме того, отношение $A_1(x)/A_0(x)$ стремится к конечному пределу при $x \to +\infty$. Его точное значение нам не существенно, но интересно отметить, что туда входит множитель $\Gamma(\frac{1}{3})$. Следовательно, среди решений уравнения Эйри имеются функции, стремящиеся к нулю при $x \to +\infty$;

именно они чаще всего встречаются в приложениях. Фиксируя специальным образом значение в нуле, получают единственную такую, обозначают её через $\mathrm{Ai}(x)$ и называют **функцией Эйри**. Оказывается, что она стремится к нулю не только вдоль полуоси, но и в целом секторе: $\mathrm{Ai}(\rho e^{i\varphi}) \to 0$ при $\rho \to +\infty$ для всех углов φ с условием $|\varphi| < \pi/3$. Вторую базисную функцию $\mathrm{Bi}(x)$ выбирают так, чтобы при $x \to -\infty$ её колебания отстояли на четверть оборота от колебаний $\mathrm{Ai}(x)$; здесь аналогия с функциями $\sin x$ и $\cos x$. Вот графики $\mathrm{Ai}(z)$ и $\mathrm{Bi}(z)$:

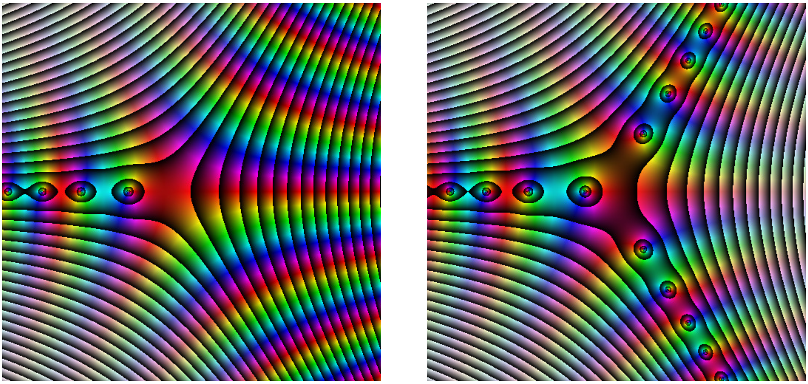
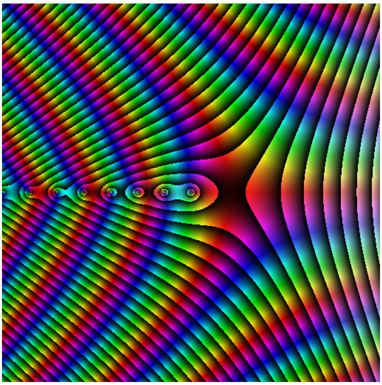


График функции Эйри $\mathrm{Ai}(z)$ неожиданно похож на график целой функции $1/\Gamma(z)$. Покажем вместо последней саму гамма-функцию:



Она имеет простые полюса в точках $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$. Между прочим, не известно никакого дифференциального уравнения, которому бы удовлетворяла $\Gamma(x)$, а относительно простого и быть не может (это теорема Гёльдера).

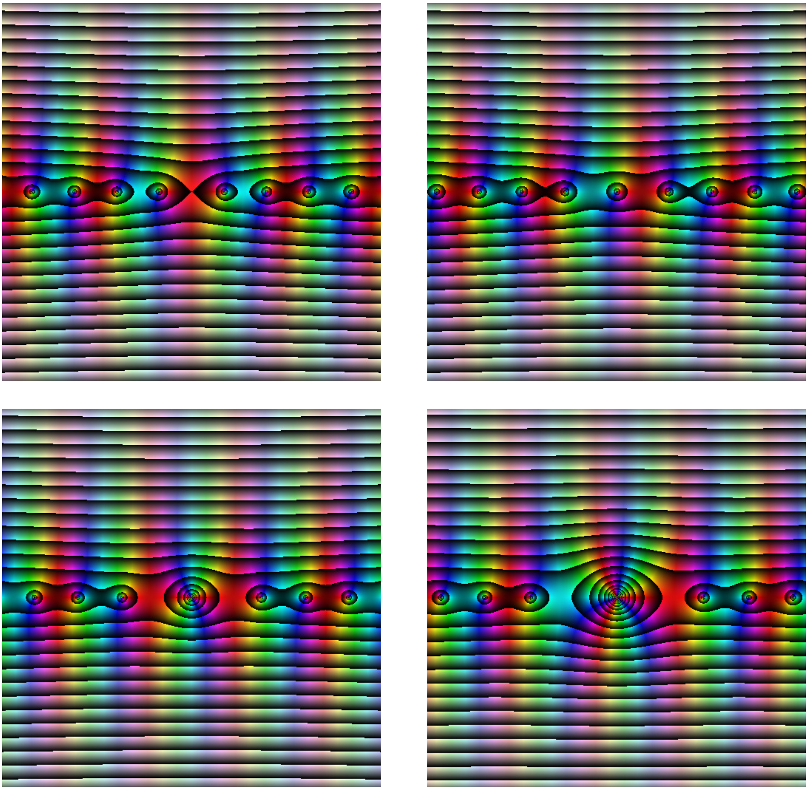
Функции Бесселя

Хотя уравнение Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu \in \mathbb{C},$$

сложнее по форме, чем уравнение Эйри, оно и важнее, особенно в случаях $\nu \in \mathbb{Z}$ и $\nu - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$, связанных с лапласианом в цилиндрических и сферических координатах соответственно.

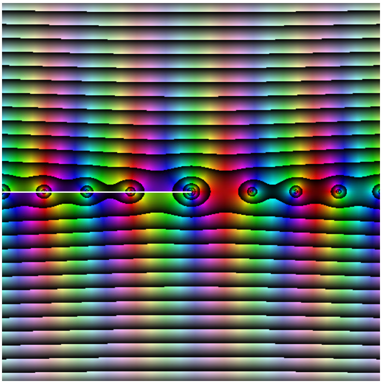
Для изображения функций Бесселя изменим окно, выбирая $a = 14$, ибо прежнее окно покажет слишком мало нулей. Вот графики функций $J_0(z)$, $J_1(z)$, $J_2(z)$ и $J_3(z)$:

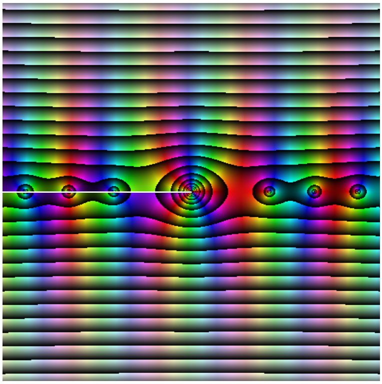


Мы видели представление функции Бесселя обобщённым рядом

$$J_\nu(z) = z^\nu \sum c_{k,\nu} z^k, \quad c_{k,\nu} = \frac{(-1)^k \cdot 2^{-2k-\nu}}{\Gamma(k+\nu+1) \cdot k!}. \tag{1}$$

При натуральных ν отсюда ясно наличие нуля порядка ν в точке $z = 0$. При других значениях ν там происходит ветвление. Например, вот графики $J_{3/2}(z)$ и $J_{5/2}(z)$:

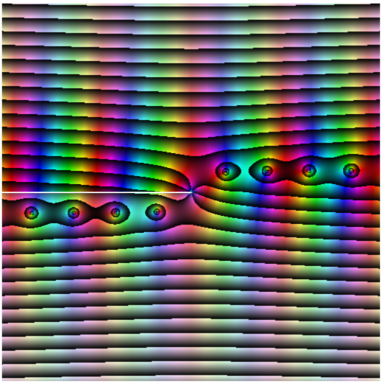


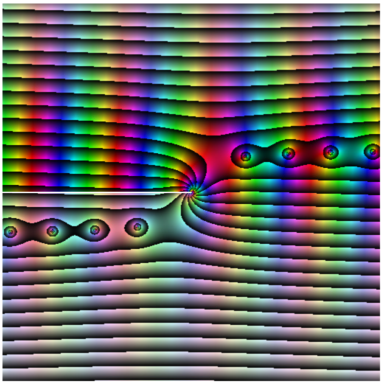


Функции Бесселя полуцелого порядка элементарны; они выражаются через $\sqrt{z}$, $\cos z$ и $\sin z$. Ветвление в точке $z = 0$ лежит целиком на совести множителя $\sqrt{z}$.

Упражнение. *Найдите выражение функций Эйри через функции Бесселя $J_{\pm 1/3}(z)$. Для получения подсказки попросите* `WolframAlpha` *решить уравнения $y'' - x^m y = 0$ для нескольких небольших натуральных значений m.*

Функции Бесселя комплексных порядков также имеют смысл, но сложно устроены вблизи точки $z = 0$ вследствие ветвления множителя $z^\nu = \exp(\nu \ln z)$. Вот графики $J_i(z)$ и $J_{1+2i}(z)$:





Круговые моды

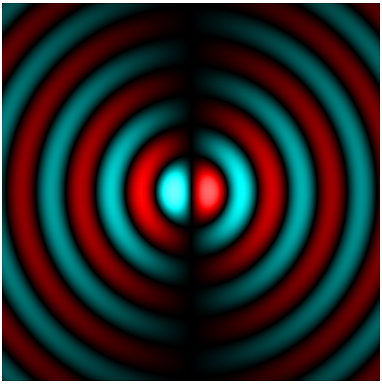
Решения уравнения Гельмгольца $\Delta u + \varkappa^2 u = 0$ в единичном круге описываются как линейные комбинации собственных функций (мод)

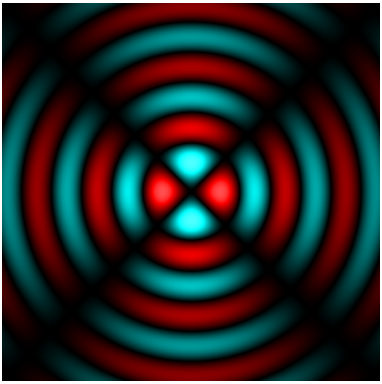
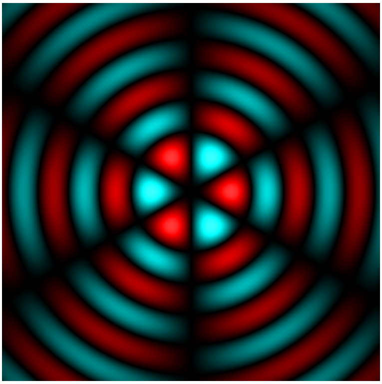
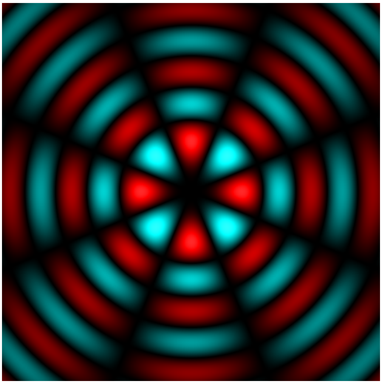
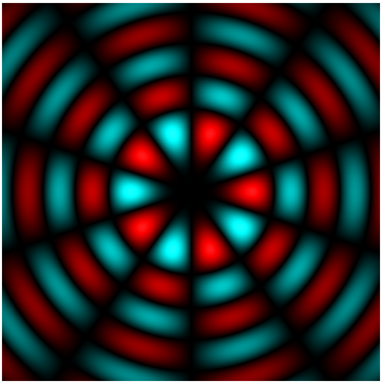
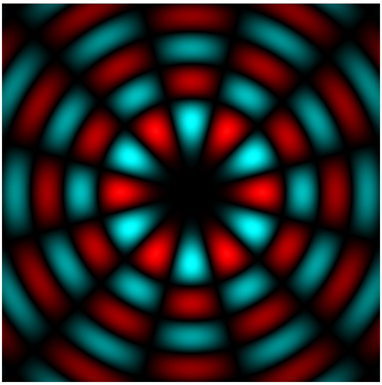
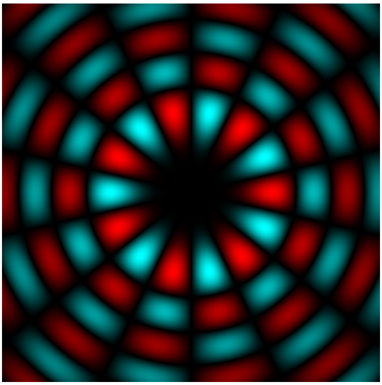
$$u_{n,k}(\rho,\varphi) = \cos n\varphi \cdot J_n(\mu_k^n \rho)$$

и таких же функций с заменой косинуса на синус. Числа μ_k^n составляют возрастающую последовательность всех положительных нулей цилиндрической функции Бесселя $J_n(x)$. Изобразим функции

$$\rho e^{i\varphi} \mapsto \cos n\varphi \cdot J_n(\rho)$$

в квадратном окне с $a = 20$ без скачков яркости. Красные области показывают положительные значения, а циановые — отрицательные (как и прежде, в общем-то, но сейчас все значения действительные); высокая яркость означает относительно большие абсолютные значения, а чернота — близость к нулю. Чтобы получить $u_{n,k}$, картинку с тем же значением n нужно обрезать по k-ой чёрной окружности.



Функции Неймана

Общее решение уравнения Бесселя нецелого порядка есть линейная комбинация решений $J_{\pm\nu}(z)$. При целом ν ситуация иная. На первый взгляд, обобщённый ряд (1) не определён при $\nu = 0, -1, -2, -3, \ldots$ ввиду использования гамма-функции. Стоит она, однако, в знаменателе, а функция $1/\Gamma(z)$ целая, так что формула на самом деле осмысленна.

Упражнение. *Преобразуя ряд, проверьте, что* $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ *для всех целых* n.

Мы уже не раз видели, как в случае вырождения системы решений недостающее базисное решение получают предельным переходом. Этот приём работает и для уравнения Бесселя целого порядка. Функциями Бесселя второго рода, или **функциями Неймана**, называют

$$\begin{cases} Y_\nu(z) = \dfrac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} & \text{при } \nu \notin \mathbb{Z}, \\ Y_n(z) = \lim\limits_{\nu\to n} Y_\nu(z) & \text{при } n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2}$$

Пара функций $\{J_\nu(z), Y_\nu(z)\}$ образует фундаментальную систему решений уравнения Бесселя для всех значений $\nu \in \mathbb{C}$, включая $\nu \in \mathbb{Z}$. Обе функции аналитически зависят от ν. Функции Неймана целого порядка также можно получить немного иначе:

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\nu\to n} \frac{J_\nu(z) - (-1)^n J_{-\nu}(z)}{\nu - n} \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial\nu}\Big(J_\nu(z) - (-1)^n J_{-\nu}(z)\Big)\Big|_{\nu=n}. \end{aligned}$$

Для полуцелых порядков косинус в (2) зануляется и функция Неймана выражается через одну функцию Бесселя:

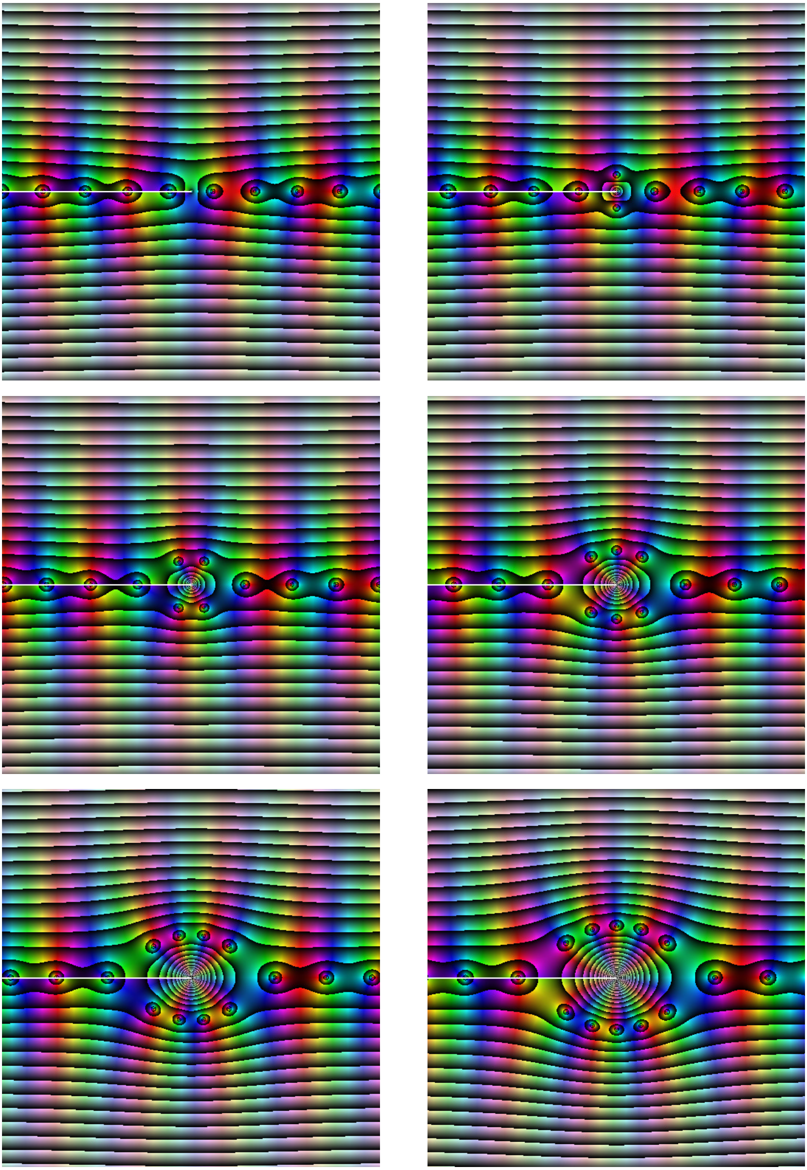
$$Y_{n-\frac{1}{2}}(z) = (-1)^n J_{\frac{1}{2}-n}(z) \qquad \text{при } n \in \mathbb{Z}.$$

В этом (и только) случае оба решения элементарны. Для $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$:

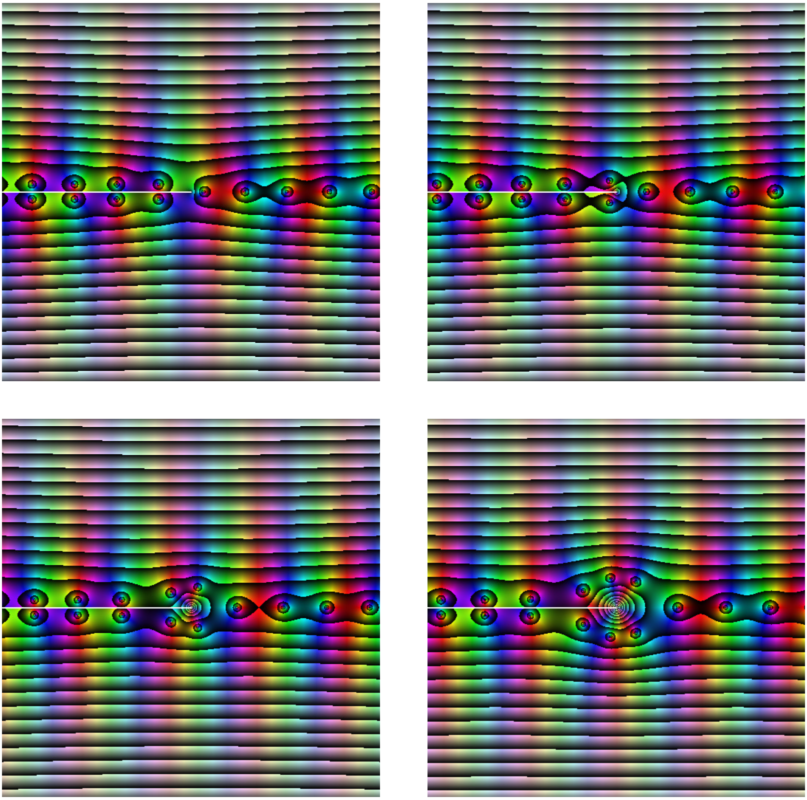
$$\begin{aligned} (-1)^n J_{\frac{1}{2}+n}(z) = \qquad -Y_{-\frac{1}{2}-n}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{z} \cdot z^n \Big(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\Big)^n \frac{\sin z}{z}, \\ J_{\frac{1}{2}-n}(z) = (-1)^n Y_{-\frac{1}{2}+n}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{z} \cdot z^n \Big(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\Big)^n \frac{\cos z}{z}. \end{aligned}$$

Начать знакомство с графиками $Y_\nu(z)$ лучше именно в этих случаях. Вот они, на следующих рисунках в окне с $a = 14$, для полуцелых ν

от $\frac{1}{2}$ до $5+\frac{1}{2}$. Вблизи точки $z=0$ на последних графиках «зебра» выходит не совсем удачно, ибо $|Y_\nu(z)| \to \infty$ весьма быстро при $z \to 0$.



По сравнению с $J_\nu(z)$ при $\nu \geqslant 0$, у них новая черта: сопряжённая пара цепочек невещественных нулей. Функции Неймана других порядков $\nu \geqslant 0$ также обладают подобными цепочками, но с уменьшающим симметрию сдвигом; кроме того, у них есть вторая новая черта: нули вдоль разреза отодвигаются от него примерно на параллельные ему прямые. На следующих рисунках $Y_{n+\varepsilon}(z)$ для $n = 0, 1, 2, 3$ и $\varepsilon = 10^{-5}$. При этом не заметны глазу ни отличия от $Y_n(z)$, ни ошибки вычислений, растущие при дальнейшем уменьшении ε.



Функции Ханкеля

При $z \to \infty$ вдоль мнимой оси все функции Бесселя и Неймана экспоненциально растут в обе стороны. В некоторых приложениях нужны решения, стремящиеся к нулю при удалении в одном из направлений. **Функции Ханкеля**

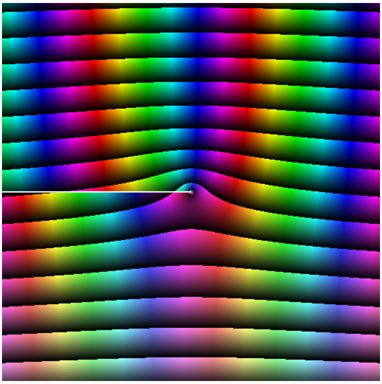
$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z),$$
$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z)$$

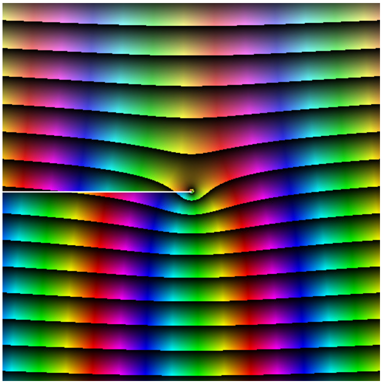
удовлетворяют

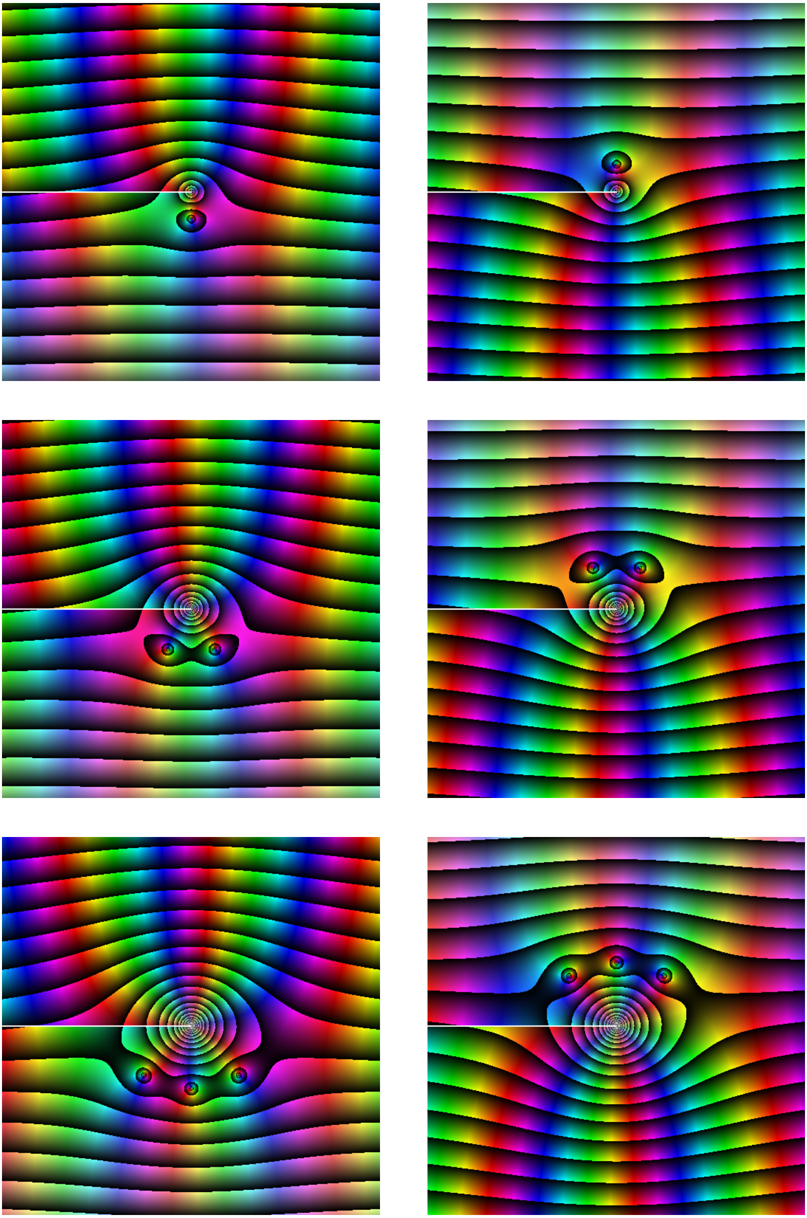
$$\lim_{\rho\to\infty} H_\nu^{(1)}(\rho e^{i\varphi}) = 0 \quad \text{при } 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$
$$\lim_{\rho\to\infty} H_\nu^{(2)}(\rho e^{i\varphi}) = 0 \quad \text{при } -\pi \leqslant \varphi \leqslant 0.$$

Если считать функции Бесселя и Неймана аналогами функций $\cos z$ и $\sin z$, то функции Ханкеля соответствуют экспонентам $e^{\pm iz}$. Вспомним, что график комплексной экспоненты проще графиков косинуса и синуса. Оказывается, что большинство нулей каждой функции $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ появляются аналогичным образом вследствие её разложения по базису Ханкеля.

Графики самих функций Ханкеля тоже интересны своими нулями. В случае полуцелого порядка функции элементарны, а все нули лежат на одной дуге. На следующих рисунках в окне с $a = 7$ пары функций $H_\nu^{(k)}(z)$ для $\nu = n + \frac{1}{2}$, где $n = 0, 1, 2, 3$. Нулей тут всегда n штук.



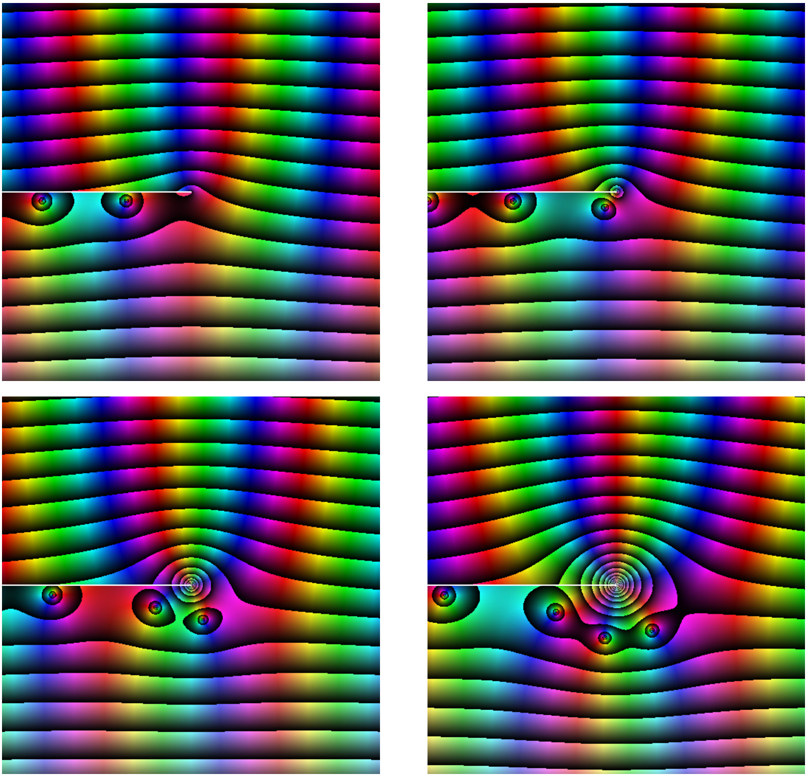




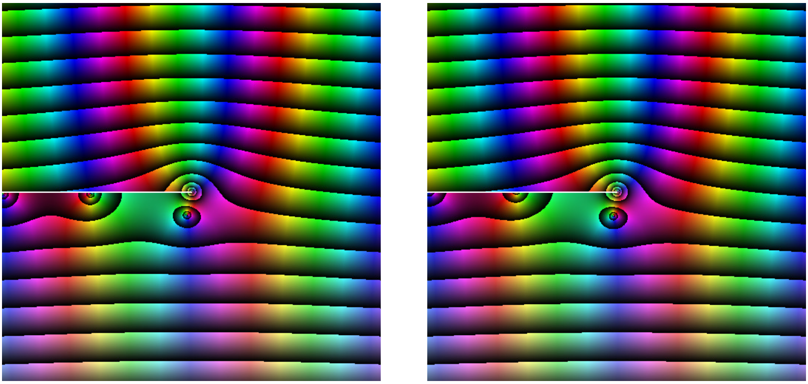
Функции Ханкеля целых порядков имеют, помимо нулей на дуге, бесконечную цепочку нулей, приближающихся к прямой параллельной вещественной оси. Ввиду симметрии

$$\overline{H_\nu^{(1)}(z)} = H_{\bar\nu}^{(2)}(\bar z),$$

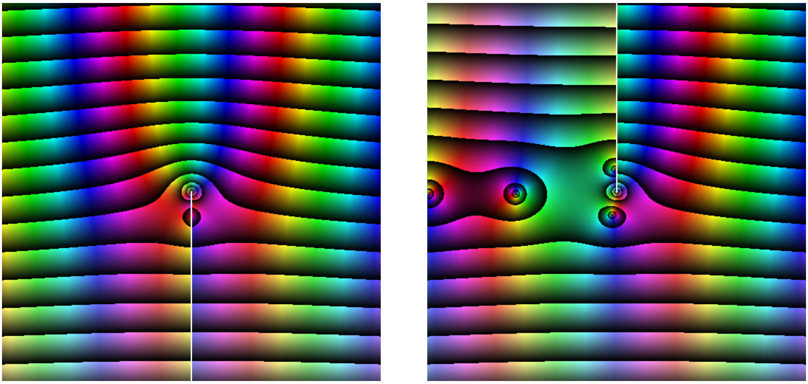
отрисуем теперь только $H_n^{(1)}(z)$ для $n = 0, 1, 2, 3$:



Здесь мы видим совершенно не похожие предельные значения на противоположных берегах разреза. Значит, существенные черты этих многолистных функций оказываются скрытыми, если ограничиваться главными листами. Например, экспериментируя с дробными порядками, можно заметить, как цепочка нулей уходит под разрез и затем возвращается. На следующих двух рисунках $\nu = 1{,}3$ и $1{,}35$; в первом случае нули остались видны, а во втором отрезаны. Нули $H_\nu^{(1)}(z)$ попадают точно на разрез при $\nu \in \mathbb{Z} \pm \frac{1}{3}$.



Чтобы лучше представить себе эти функции, приходится рассматривать совокупности их листов, то есть, аналитические продолжения. Посмотрим сперва для $\nu = 1{,}3$, что получается после поворота разреза на $\pm\pi/2$:



Левый рисунок симметричен благодаря разрезу

$$-\pi < 2\arg z < 3\pi.$$

Представленные выше случаи полуцелых и целых порядков позволяют догадаться, что «ось симметрии» функции $H_\nu^{(1)}(z)$ находится в этом же положении $2\arg z = \pi$ при всех значениях ν.

На правом рисунке при удалении вдоль правого края разреза

$$-3\pi < 2\arg z < \pi$$

функция убывает, а вдоль левого края растёт. Это тоже происходит при всех значениях ν.

Аналитическое продолжение

Аналитическое продолжение функций Бесселя удовлетворяет

$$J_\nu(ze^{i\pi}) - J_\nu(z) \cdot e^{i\pi\nu} = 0.$$

Простое изменение фазы на других листах не слишком интересно с точки зрения зебр. Однако, раскладывая по базису Бесселя $J_{\pm\nu}(z)$ функции Ханкеля нецелого порядка, видим, что составляющие приобретают разные фазы, поэтому поведение их суммы различно на разных листах. При этом простейшее соотношение

$$H_\nu^{(1)}(ze^{i\pi}) + H_\nu^{(2)}(z) \cdot e^{i\pi\nu} = 0$$

не позволяет уйти далеко. Положим

$$h_k = H_\nu^{(1)}(ze^{i\pi k}) \quad \text{или} \quad h_k = H_\nu^{(2)}(ze^{-i\pi k}).$$

В обоих случаях для всех $m \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$h_m = s_m h_1 - s_{m-1} h_0, \qquad \text{где } s_k = \frac{\sin(\pi\nu k)}{\sin(\pi\nu)},$$

а при $\nu \to n \in \mathbb{Z}$ используется предельное значение $s_k \to (-1)^k$.

Далее будем изучать только первые функции $H_\nu^{(1)}(z)$ неотрицательных вещественных порядков. Получив возможность изображать разные листы, естественно разобраться, сколько их всего есть.

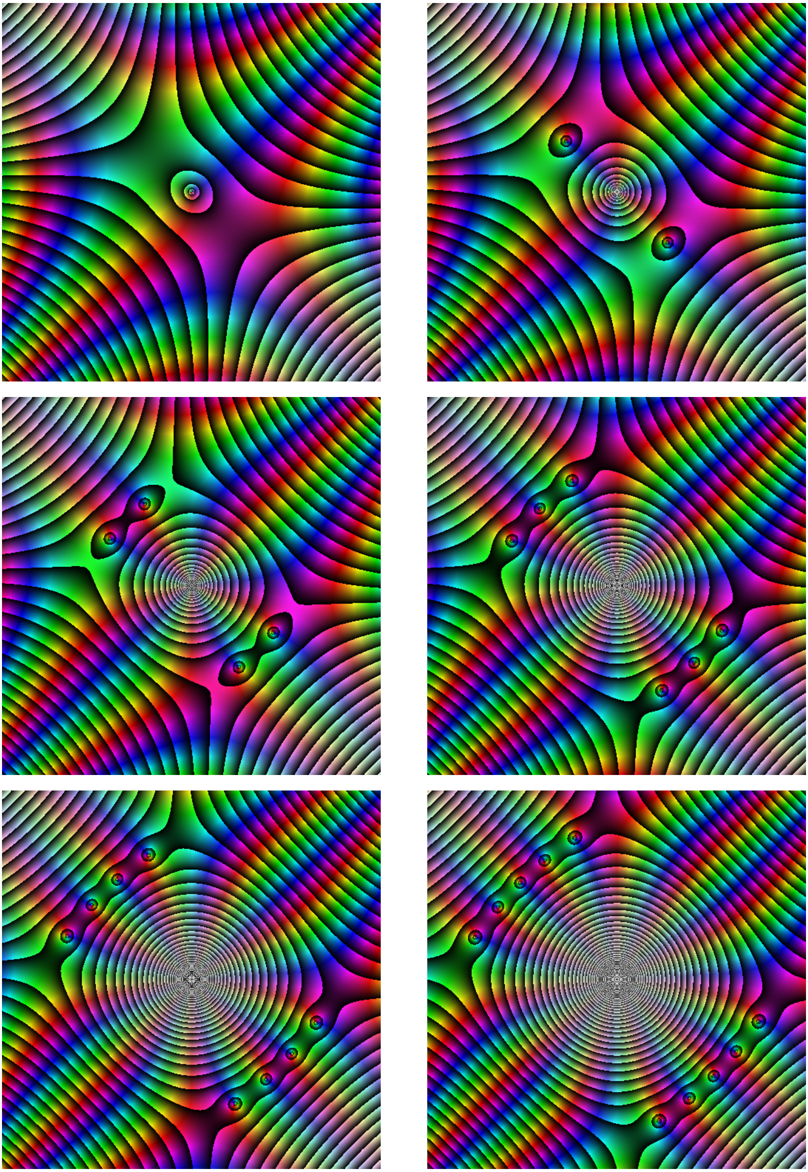
Вспомним, что лишь одно решение $J_n(z)$ уравнения Бесселя целого порядка n представимо обобщённым степенным рядом, а второе решение $Y_n(z)$ имеет логарифмическую особенность. У такой функции ветвление в точке $z = 0$ бесконечное. То же самое можно сказать о функции Ханкеля. В остальных случаях

$$J_{\pm\nu}(z) = z^\nu \cdot f_\pm(z),$$

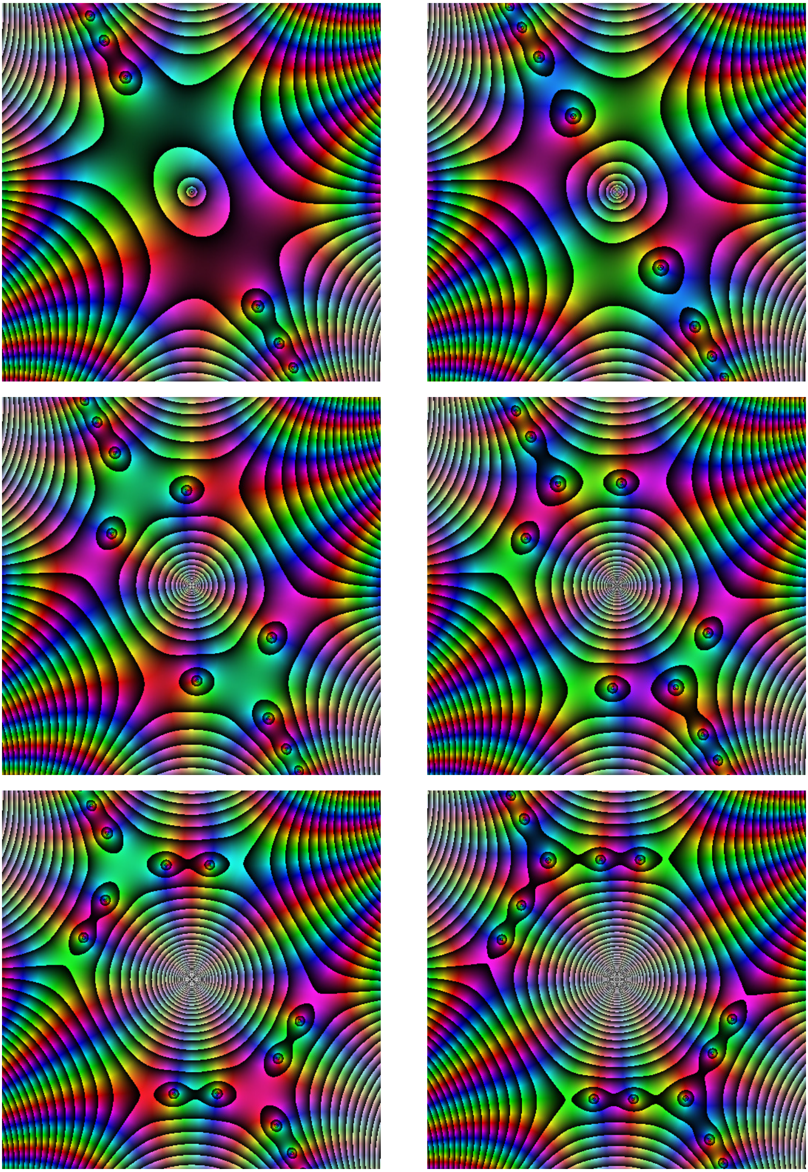
где вторые сомножители аналитические на всей плоскости. Когда порядок иррационален, ветвление функции $z^\nu = e^{\nu \ln z}$ в точке $z = 0$ также бесконечное.

В случае рационального порядка $\nu = p/q$ функция z^ν ветвится в точке $z = 0$ на q листов. Это же верно и про обе функции Бесселя; считая тогда, что $z = w^q$, мы представим их как аналитические функции переменной w. Такой же заменой получаем аналитические «развёртки» функций Ханкеля. Именно они показаны на следующих сериях рисунков. Не будем уточнять теперь размеры окна — по ряду причин здесь они зависят от ν.

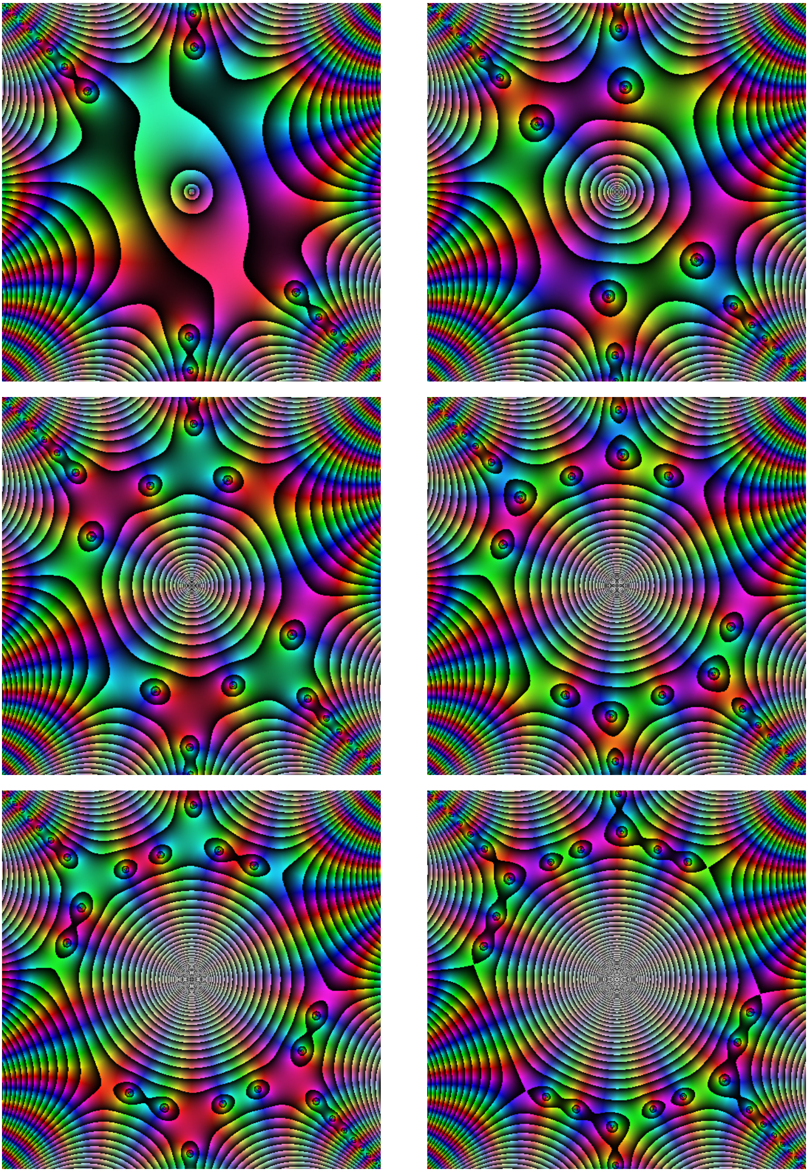
Начнём с элементарных. Развёртки для $\nu = n + \frac{1}{2}$ с n от 0 до 5:



Теперь слева $\nu = n + \frac{1}{3}$, а справа $\nu = n + \frac{2}{3}$, с $n = 0, 1, 2$:



Теперь слева $\nu = n + \frac{1}{4}$, а справа $\nu = n + \frac{3}{4}$, с $n = 0, 1, 2$:



Симметризация функций Ханкеля

Рассмотренные развёртки побуждают видоизменить функции так, чтобы оси симметрии совпадали с вещественной и мнимой осями, а также подправить фазы. Можно ожидать, что это приведёт к более симметричным соотношениям. (Интересно ещё погасить полюс.)

Заниматься всем этим далее у меня сейчас нет возможности, но хочется надеяться, что продолжение следует...